- ES-S1 - - 2017-2018 -

– Correction - Analyse –

Exercice 1

1. On suppose qu'il existe une fonction h, développable en série entière, solution de (H) sur $]0,1[$.
On note $h(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, et R le rayon de convergence.
h est solution de H sur $]0,1[$, si, et seulement si pour tout $x\in]-R,R[\cap]0,1[$, on a :

$$(x^2-x)\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}+3x\sum_{k=0}^{+\infty}ka_kx^{k-1}+\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k=0$$

ce qui équivaut à :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left((k+1)^2a_k-k(k+1)a_{k+1}\right)x^k=0$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que : $\begin{cases} a_0=0 \\ a_{k+1}=\dfrac{k+1}{k}a_k & \forall k\in\mathbb{N}^* \end{cases}$.
Un récurrence immédiate donne : $\forall k\in\mathbb{N}^*, a_k=ka_1$.
La série entière $\sum kx^k$ a pour rayon de convergence $R=1$, et pour somme :
$\sum_{k=0}^{+\infty}kx^k=x\sum_{k=0}^{+\infty}kx^{k-1}=x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\right)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$.
La fonction h définie sur $]0,1[$ par $h(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$ répond donc au problème posé.

2. La fonction h ne s'annulant pas sur $]0,1[$, on cherche une solution de (H) sous la forme $z=\lambda h$.
z est solution de (H) si, et seulement si λ' est solution de l'équation différentielle

$$(L) : x(x-1)y'+(x-2)y=0$$

On a : $\displaystyle\int\frac{2-x}{x(x-1)}\mathrm{d}x=\int\left(-\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x=-2\ln|x|+\ln|1-x|+K$, où $K\in\mathbb{R}$.
Ainsi, pour $x\in]0,1[$, $\lambda'(x)=C_1\dfrac{1-x}{x^2}$, où $C_1\in\mathbb{R}$.
En primitivant, on obtient, pour $x\in]0,1[$: $\lambda(x)=-\dfrac{C_1}{x}-C_1\ln x+C_2$, où $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$.

On a ainsi trouvé deux solutions indépendantes de l'équation homogène (H), donc l'ensemble des solutions de (H) :
$S_H=\mathrm{Vect}\left\{x\mapsto\dfrac{1+x\ln x}{(1-x)^2};x\mapsto\dfrac{x}{(1-x)^2}\right\}$.

Exercice 2

1. Soit $x \geq 0$. La fonction $g_x : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^x$ est continue sur $]0,+\infty[$.

☒ Etude en 0 :

$\hookrightarrow$ Si $x = 0$: $g_0(t) = \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0,1]$.
$\hookrightarrow$ Si $x > 0$: $\lim\limits_{t \to 0} g_x(t) = 0$, donc g_x se prolonge par continuité en 0.

Finalement $\displaystyle\int_0^1 g_x(t)\mathrm{d}t$ converge.

☒ Etude en $+\infty$:

$\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 g_x(t) = 0$, donc $g_x(t) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$; par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_x(t)\mathrm{d}t$ converge.

Finalement, pour tout $x \geq 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\mathrm{d}t$ converge, donc G est définie sur $[0,+\infty[$.

2. $G(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1$.
$G\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
On effectue un changement de variable bijectif et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, en posant $x = \sqrt{t}$.
L'intégrale étant convergente d'après la question précédente, on obtient :
$G\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 2x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.
On pose $u(x) = x$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}$. u et v sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.
$u(0)v(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)v(x) = 0$, par croissances comparées.
L'intégrale étant convergente, le théorème d'intégration par parties donne :
$G\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. Soit $x \geq 0$. On a : $G(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x+1}\mathrm{d}t$.

On pose $u(t) = t^{x+1}$ et $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$. u et v sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.
$u(0)v(0) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x)v(x) = 0$, par croissances comparées.

L'intégrale étant convergente, le théorème d'intégration par parties donne :
$G(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (x+1)\mathrm{e}^{-t}t^x\mathrm{d}t = (x+1)G(x)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a : $G(n+1) = (n+1)G(n)$.

Une récurrence immédiate donne pour tout $n \in \mathbb{N}$: $G(n) = n!G(0) = n!$.

Exercice 3

1. D'après le théorème fondamental d'intégration, la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction exponentielle admet un DSE de rayon infini, et on a :

$$\forall z \in \mathbb{R}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

En substituant $-x^2$ à z, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

donc la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ admet un DSE de rayon infini.
De même, $x \mapsto e^{x^2}$ admet un DSE de rayon infini, donc d'après le théorème de primitivation, sa primitive s'annulant en 0 également.
Ainsi, F est le produit de deux fonctions admettant un DSE donc, d'après le théorème de Cauchy, elle admet un DSE de rayon supérieur ou égal au plus petit des deux rayons, donc infini.

3. En dérivant le produit, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = -2x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + e^{-x^2} \times e^{x^2} = -2xF(x) + 1$$

donc F est solution de (L) sur $\mathbb{R}$.

4. On note $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$; le théorème de dérivation donne : $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.
Dans (L), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = -2x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 1$$

ce qui équivaut à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1}\right) x^n = 1$$

Par unicité du DSE, on en déduit :

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{-2}{n+1} a_{n-1}$$

5. On a : $a_0 = F(0) = 0$; d'après la question précédente, avec deux récurrences immédiates, il vient :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 4^p !}{(2p+1)!}$$

On a montré précédemment que le DSE de F a un rayon infini (ce qui peut se redémontrer grâce au critère de d'Alembert).

6. $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$, donc le théorème de primitivation donne :

$\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$.

7. $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$.

En notant $y = x^2$, on a : $\mathrm{e}^{-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{y^n}{n!}$ et $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t = x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{(2n+1)n!}$.

Le produit de Cauchy des séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{(2n+1)n!}$, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{y^n}{n!}$ donne :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{(2n+1)n!}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n y^n$$

où le coefficient c_n est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)k!} \times \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}.$$

Par unicité du DSE de F, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = c_n$ d'où, en multipliant les deux membres par $(-1)^n n!$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{-k}}{2k+1} \times \binom{n}{k} = \frac{4^n}{2n+1} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{4^n}{2n+1} \times \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

Sachant que $(-1)^k = (-1)^{-k}$, on a le résultat attendu.