$\star$ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse $\star$ - 2017-2018 -

Math. – ES 2 - S2 – Analyse

jeudi 24 mai 2018 - Durée 2 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

Un individu joue avec une pièce non nécessairement équilibrée. On note p la probabilité d'obtenir *Pile*, et on suppose que $p \in]0,1[$.
Dans un premier temps, il lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois *Pile*. On note N le nombre de lancers nécessaires.
Dans un second temps, il lance N fois cette même pièce, et on note X le nombre de *Pile* obtenus au cours de cette seconde série de lancers.

1. Préciser la loi de N, et la loi conditionnelle de X sachant $(N = n)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Déterminer la loi du couple (N, X).

3. On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par :

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \frac{1}{1-x}$$

- **a.** Donner l'expression de la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f pour tout $k \geq 0$.
- **b.** En déduire le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$ au voisinage de 0, pour $k \in \mathbb{N}$.

4. A l'aide de la question précédente, montrer que la loi de X est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1-p}{2-p} \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1, \mathbb{P}(X = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}$$

5. Soient $\lambda \in]0,1[$, U une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre λ, et V une variable aléatoire géométrique de paramètre λ, indépendante de U. On note $Y = UV$.

- **a.** Sans calculer sa loi, calculer l'espérance de Y.
- **b.** Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(Y = k)$ (on traitera séparément le cas $k = 0$).
- **c.** Calculer la variance de Y.

6. En déduire que X a la même loi qu'un produit de variables aléatoires indépendantes, l'une étant une variable de Bernoulli, l'autre une variable géométrique de même paramètre.

T.S.V.P.

Exercice II

On considère les fonctions

$$F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} \quad \text{et} \quad G : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^{xt}-1}\mathrm{d}t$$

1. Déterminer le domaine de définition et F et préciser sa parité.

2. Montrer (sans calculer F') que F est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser sa monotonie.

3. Pour $x > 0$, justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2x^2}\mathrm{d}t$$

et en donner sa valeur.

4. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'inégalité

$$\frac{1}{1+n^2x^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{1+t^2x^2}\mathrm{d}t$$

En déduire que

$$F(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2x^2}\mathrm{d}t$$

5. Démontrer de même que l'on a :

$$\forall x > 0, \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2x^2}\mathrm{d}t - 1 \leq F(x)$$

6. Déduire de ce qui précède un équivalent de $F(x)$ en 0^+, ainsi que la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

7. Représenter l'allure du graphe de F sur $\mathbb{R}^*$.

8. Démontrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (on ne s'intéressera pas aux valeurs négatives de x).

9. Pour $\alpha > 0$, établir la convergence, puis donner la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$$

10. Démontrer que

$$\forall t > 0, \forall x > 0, \frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^{xt}-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-nxt}$$

<u>Remarque :</u> A l'aide d'un théorème qui n'est pas au programme, on en déduit que

$$\forall x > 0, F(x) = G(x)$$

Fin de l'énoncé d'analyse