- ES-S2 - - 2017-2018 -

– Correction - Analyse –

Exercice I

1. N est le rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p, donc N suit la loi géométrique de paramètre p, c'est-à-dire :

$$\mathbb{N}(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(N = n) = p(1-p)^{n-1}$$

Sachant que $N = n$, la variable aléatoire X est le nombre de succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p, donc la loi conditionnelle de X sachant $N = n$ est une loi binomiale de paramètres (n, p), c'est-à-dire :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \mathbb{P}_{(N=n)}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2. Le couple (N, X) est à valeurs dans $\{(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n\}$, et pour (n, k) dans cet ensemble :

$$\mathbb{P}(N = n, X = k) = \mathbb{P}_{(N=n)}(X = k) \times \mathbb{P}(N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times p(1-p)^{n-1} = \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1}$$

3. a. Une récurrence immédiate donne $\forall x \in]-1, 1[, f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

b. Par des dérivations terme à terme successives du développement en série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)(n+k-1)...(n+1)}{k!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n$$

4. On applique la formule de probabilités totales au système complet d'événements $(N = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, ce qui donne :

Pour $k = 0$: $\mathbb{P}(X = 0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 0, N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{2n-1} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}$.

Pour $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, N = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, N = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n+k-1} = p^{k+1} (1-p)^{k-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} (1-p)^{2n} \\
&= \frac{p^{k+1}(1-p)^{k-1}}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}
\end{aligned}$$

5. a. U et V étant indépendantes, on a $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U) \times \mathbb{E}(V) = \lambda \times \dfrac{1}{\lambda} = 1$.

b. Pour $k = 0$, on a : $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(U = 0) = 1 - \lambda$, et pour $k \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(U = 1, V = k) = \mathbb{P}(U = 1) \times \mathbb{P}(V = k) = \lambda^2 (1-\lambda)^{k-1}$$

car U et V sont indépendantes.

c. Comme U^2 et V^2 sont indépendantes, avec de plus $U^2 = U$, on a :

$$\mathrm{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \mathbb{E}(U^2 V^2) - 1 = \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V^2) - 1 = \lambda \mathbb{E}(V^2) - 1$$

On sait que la variance de V est $\dfrac{1-\lambda}{\lambda^2}$, on a donc : $\mathbb{E}(V^2) - \mathbb{E}(V)^2 = \dfrac{1-\lambda}{\lambda^2}$.

On en déduit que $\mathbb{E}(V^2) = \dfrac{1-\lambda}{\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{2-\lambda}{\lambda^2}$.

Finalement, $\mathrm{V}(Y) = \dfrac{2-\lambda}{\lambda} - 1 = 2\dfrac{1-\lambda}{\lambda}$.

6. On choisit λ tel que $\dfrac{1-p}{2-p} = \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(Y=0) = 1-\lambda$, c'est-à-dire $\lambda = \dfrac{1}{2-p}$.
On a alors :

$$\forall k \geq 1, \mathbb{P}(Y=k) = \lambda^2(1-\lambda)^{k-1} = \frac{1}{(2-p)^2}\frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k-1}} = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} = \mathbb{P}(X=k)$$

et de plus, $Y(\Omega) = X(\Omega) = \mathbb{N}$. Ainsi, pour ce choix de λ, X et Y ont la même loi.

Exercice II

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n^2x^2}$ est une série à termes positifs.

- Si $x = 0$, tous les termes sont égaux à 1, et la série est grossièrement divergente.
- Si $x \neq 0$, $\dfrac{1}{1+n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{n^2}$, et par comparaison de séries à termes positifs (l'une étant une série de Riemann convergente), la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n^2x^2}$ converge.

On en déduit que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}^*$.

De plus, on a immédiatement : pour $x \in \mathbb{R}^*$, $F(-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2(-x)^2} = F(x)$, donc F est paire.

2. Soient $0 < x < y$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, on : $\dfrac{1}{1+n^2x^2} \geq \dfrac{1}{1+n^2y^2}$, et par sommation (les séries convergeant), on en déduit que $F(x) \geq F(y)$. La fonction F est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

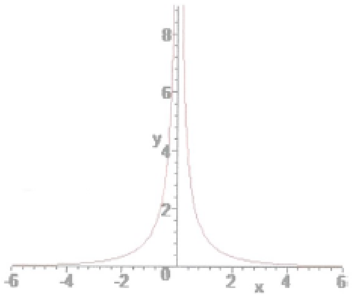
3. Soit $x > 0$. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2x^2}$.
f est continue sur $\mathbb{R}^+$. Elle est donc localement intégrable.
De plus, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{t^2}$, donc par comparaison à une intégrale de Riemann, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.
On a de plus : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\operatorname{Arctan}(tx)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$.

4. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2x^2}$ est décroissante sur le segment $[n-1, n]$, donc :
$\forall t \in [n-1, n]$, $\dfrac{1}{1+n^2x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2x^2}$; en intégrant sur le segment on obtient : $\dfrac{1}{1+n^2x^2} \leq \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{1+t^2x^2}\mathrm{d}t$.
Pour $N > 0$, en sommant ces inégalités pour n variant de 1 à N on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+n^2x^2} \leq \int_0^N \frac{1}{1+t^2x^2}\mathrm{d}t$.
Les convergences de la série et de l'intégrale établies précédemment permettent le passage à limite de N vers $+\infty$, et on obtient : $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2x^2}\mathrm{d}t$.

5. Avec la même démarche, on obtient pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{1+t^2x^2}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{1+(n-1)^2x^2}$, puis en sommant :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2x^2}\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(n-1)^2x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} = 1 + F(x)$.

6. On en déduit que pour $x > 0$: $\dfrac{\pi}{2x} - 1 \leq F(x) \leq \dfrac{\pi}{2x}$, d'où : $F(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{\pi}{2x}$.
Par ailleurs, pour $x > 0$ on a : $0 \leq F(x) \leq \dfrac{\pi}{2x}$, et le théorème d'encadrement donne : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

7. Une allure du graphe de F :



8. On considère la fonction $g : (x,t) \mapsto \dfrac{\sin(t)}{e^{xt}-1}$.

- Pour $x>0$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour $t>0$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$; $\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[, |g(x,t)| \leq \left|\dfrac{\sin(t)}{e^{at}-1}\right| = \varphi_a(t)$.

  On a : $\dfrac{\sin(t)}{e^{at}-1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{at}$, donc $\lim\limits_{t\to 0} \varphi_a(t) = \dfrac{1}{a}$; la fonction $t \mapsto \varphi_a(t)$ est donc prolongeable par continuité en 0, et $\displaystyle\int_0^1 \varphi_a(t)\mathrm{d}t$ converge.

  De plus : $t^2\left|\dfrac{\sin(t)}{e^{at}-1}\right| \leq \dfrac{t^2}{e^{at}-1}$ avec $\dfrac{t^2}{e^{at}-1} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2 e^{-at} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $\varphi_a(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_a(t)\mathrm{d}t$ converge.

  Finalement, φ_a est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Le théorème de continuité donne G continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

9. Soit $\alpha > 0$. Pour $M>0$, on a :

$$\int_0^M \sin(t)e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^M e^{it-\alpha t}\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(i-\alpha)t}}{i-\alpha}\right]_0^M\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{(i-\alpha)M}}{i-\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha^2+1}.$$

$\left|\dfrac{e^{(i-\alpha)M}}{i-\alpha}\right| = \dfrac{e^{-\alpha M}}{\sqrt{1+\alpha^2}} \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\alpha^2+1}$.

10. Pour $x>0$ et $t>0$, on a $|e^{-xt}| \leq 1$, d'où : $\dfrac{\sin(t)}{e^{xt}-1} = \dfrac{\sin(t)}{e^{xt}} \cdot \dfrac{1}{1-e^{-xt}} = \sin(t)\, e^{-xt} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nxt}$.

On en déduit que $\dfrac{\sin(t)}{e^{xt}-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(t)\, e^{-(n+1)xt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t)\, e^{-nxt}$.