Math. – ES 2 - S2 – Géométrie

jeudi 24 mai 2018 - Durée 2 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice I

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$.

1. a. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{R}_\theta : (x,y,z) \mapsto (\cos(\theta)x+\sin(\theta)z, y, -\sin(\theta)x+\cos(\theta)z)$.
Justifier que R_θ est une rotation de $\mathbb{R}^3$, et préciser les éléments caractéristiques.

b. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, et $M_{x_0} = \left(x_0, \dfrac{x_0^2}{2}, 0\right)$. Déterminer la nature de $\Gamma_{x_0} = \{R_\theta(M_{x_0}), \theta \in \mathbb{R}\}$, ainsi que des équations de Γ_{x_0}.

c. Déterminer une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S} = \displaystyle\bigcup_{x_0\in\mathbb{R}} \Gamma_{x_0}$. Que peut-on dire de cette surface ?

d. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,z) = \left(x, \dfrac{x^2+z^2}{2}, z\right)$, et la surface $\Sigma = f(\mathbb{R}^2)$.
Soient $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(r,\theta) = \left(r\sin(\theta), \dfrac{r^2}{2}, r\cos(\theta)\right)$, et la surface $\Phi = \varphi(\mathbb{R}^2)$.
Justifier que les surfaces $\mathscr{S}, \Sigma$, et Φ sont confondues.

e. Soient $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé, et $A_0 = f(x_0, z_0)$. Déterminer une équation du plan tangent à Σ en A_0.

2. On note Δ l'axe $(0y)$ et on considère les deux courbes paramétrées :

$$\mathscr{C}_1 : \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{2} \\ z = 0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathscr{C}_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

a. Soit $P = \left(x_0, \dfrac{x_0^2}{2}, 0\right)$ appartenant à $\mathscr{C}_1$, avec $x_0 \neq 0$. Déterminer le point A_1, intersection entre Δ et la tangente à $\mathscr{C}_1$ en P.

b. Soit $Q = \left(0, y_0, \dfrac{y_0^2}{2}\right)$ appartenant à $\mathscr{C}_2$, avec $y_0 \neq 0$. Déterminer le point A_2, intersection entre Δ et la tangente à $\mathscr{C}_2$ en Q.

c. A quelle condition a-t-on $A_1 = A_2$?

d. Soit Ψ la surface réglée engendrée par les droites (PQ) telles que $P \in \mathscr{C}_1, Q \in \mathscr{C}_2$, avec $P \neq Q$ et tels que la tangente à $\mathscr{C}_1$ en P et la tangente à $\mathscr{C}_2$ en Q se coupent sur Δ.
Montrer qu'une représentation paramétrique de Ψ est donnée par : $\psi(x_0,t) = \left(tx_0, \dfrac{3t-2}{2}x_0^2, \dfrac{1-t}{2}x_0^4\right)$.

e. Montrer que les plans tangents à Ψ en tous les points réguliers de Ψ qui appartiennent à une même génératrice (PQ) sont parallèles.

T.S.V.P.

Exercice II

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ rapporté au repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\right)$, on considère la courbe Γ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y(t) = \dfrac{1}{t^2} + 2t \end{array}\right. \quad , \; t \in \mathbb{R}_-^*.$$

Pour $t < 0$, on note M_t le point de Γ de paramètre t.

1. a. Pour $t \in \mathbb{R}_-^*$, justifier que la normale au point M_t a pour équation :

$$tx + y - \left(2 + 2t + t^3 + \frac{1}{t^2}\right) = 0$$

b. En déduire une représentation paramétrique de la développée de Γ.

c. Utiliser le résultat précédent pour donner le centre et le rayon de courbure de Γ au point M_{-1}.

2. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω de coordonnées $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et de rayon $r > 0$.
On dit que Γ et $\mathscr{C}$ sont tangents en un point A si :
– $A \in \mathscr{C} \cap \Gamma$
– la tangente à $\mathscr{C}$ en A et la tangente à Γ en A sont confondues.

a. Exprimer b et r en fonction de a pour que $\mathscr{C}$ et Γ soient tangentes en M_{-1}.

b. Dans ces conditions, donner une équation de $\mathscr{C}$ sous la forme $f_a(x, y) = 0$ ne dépendant que du paramètre a.

c. Montrer que pour $a = 7$, $f_7(x(t), y(t)) = o_{t\to -1}\left((t+1)^3\right)$.

d. Que remarque-t-on alors pour Ω et r ?

Fin de l'énoncé de géométrie