- ES-S2 - - 2017-2018 -

– Correction - Géométrie –

Exercice 1

1. a. $\mathrm{Mat}_{\vec{k},\vec{i},\vec{j}}(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; on en déduit que R_θ est la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe $\mathrm{Vect}\{\vec{j}\}$, d'angle θ.

b. Γ_{x_0} est le cercle contenu dans le plan d'équation $y = \dfrac{x_0^2}{2}$, de centre $C\left(0, \dfrac{x_0^2}{2}, 0\right)$ et de rayon $|x_0|$.

Il admet pour équations : $\begin{cases} y = \dfrac{x_0^2}{2} \\ x^2 + z^2 = x_0^2 \end{cases}$ et pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_0\cos(\theta) \\ y = \dfrac{x_0^2}{2} \\ z = -x_0\sin(\theta) \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$.

c. $\mathscr{S}$ a pour équation : $x^2 + z^2 - 2y = 0$. C'est une surface de révolution, engendrée par la parabole d'équations $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} \\ z = 0 \end{cases}$, autour de l'axe (Oy).

Remarque : $\mathscr{S}$ s'appelle un paraboloïde.

d. On a d'une part : $(x,y,z) \in \mathscr{S} \Leftrightarrow (x,y,z) = f(x,z) \Leftrightarrow (x,y,z) \in \Sigma$; d'autre part :

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \mathscr{S} \quad & \Leftrightarrow \quad \exists (x_0,\theta) \in \mathbb{R}^2, (x,y,z) = \left(x_0\cos(\theta), \frac{x_0^2}{2}, -x_0\sin(\theta)\right) \\ & \Leftrightarrow \quad \exists (x_0,\theta) \in \mathbb{R}^2, (x,y,z) = \varphi\left(x_0, \frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ & \Leftrightarrow \quad (x,y,z) \in \Phi \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathscr{S}, \Sigma$ et Φ sont confondues.

e. On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,z_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,z_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,z_0) \wedge \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,z_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ -1 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

On en déduit une équation du plan tangent à Σ en A_0 :

$x_0(x - x_0) - \left(y - \dfrac{x_0^2 + z_0^2}{2}\right) + z_0(z - z_0) = 0$, soit encore : $x_0 x - y + z_0 z - \dfrac{x_0^2 + z_0^2}{2} = 0$.

2. a. La tangente en P à $\mathscr{C}_1$ est dirigée par $\overrightarrow{T_1}\begin{pmatrix} 1 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$; elle admet donc pour représentation paramétrique :

$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = \dfrac{x_0^2}{2} + x_0 t \\ z = 0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. On en déduit que son intersection avec la droite Δ est le point $A_1\left(0, -\dfrac{x_0^2}{2}, 0\right)$.

b. La tangente en Q à $\mathscr{C}_2$ est dirigée par $\overrightarrow{T_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y_0 \end{pmatrix}$; elle admet donc pour représentation paramétrique :

$\begin{cases} x = 0 \\ y = y_0 + t \\ z = \dfrac{y_0^2}{2} + y_0 t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. On en déduit que son intersection avec la droite Δ est le point $A_2\left(0, \dfrac{y_0}{2}, 0\right)$.

c. $A_1 = A_2 \Leftrightarrow y_0 = -x_0^2$.

d. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$. On considère les points $P\left(x_0, \dfrac{x_0^2}{2}, 0\right)$ et $Q\left(0, -x_0^2, \dfrac{x_0^4}{2}\right)$ qui satisfont la condition précédente.

On a : $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dfrac{3}{2}x_0^2 \\ -\dfrac{x_0^4}{2} \end{pmatrix}$. Ainsi, la surface réglée engendrée par les droites (PQ) admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_0 t \\ y = -x_0^2 + \dfrac{3}{2} x_0^2 t \\ z = \dfrac{x_0^4}{2} - \dfrac{x_0^4}{2} t \end{cases}$, $(x_0, t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

e. On a : $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, t) = \begin{pmatrix} t \\ (3t-2)x_0 \\ 2(1-t)x_0^3 \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x_0, t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dfrac{3}{2} x_0^2 \\ -\dfrac{x_0^4}{2} \end{pmatrix}$, donc $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, t) \wedge \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(x_0, t) = \begin{pmatrix} \left(-2 + \dfrac{3}{2} t\right) x_0^5 \\ \left(2 - \dfrac{3}{2} t\right) x_0^4 \\ \left(2 - \dfrac{3}{2} t\right) x_0^2 \end{pmatrix}$.

Pour $x_0 \in \mathbb{R}^*$, et $t \neq \dfrac{4}{3}$, les plans tangents à Ψ en $M = \psi(x_0, t)$ admettent $\vec{n} = \begin{pmatrix} x_0^3 \\ -x_0^2 \\ -1 \end{pmatrix}$, comme vecteur normal, ils sont donc parallèles.

Exercice 2

1. a. Pour $t < 0$, la tangente en M_t à Γ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{T_t} = \begin{pmatrix} 2t - \dfrac{2}{t^2} \\ -\dfrac{2}{t^3} + 2 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$.

On en déduit que a normale à Γ en M_t admet pour équation :
$2t\left(1 - \dfrac{1}{t^3}\right)\left(x - t^2 - \dfrac{2}{t}\right) + 2\left(-\dfrac{1}{t^3} + 1\right)\left(y - \dfrac{1}{t^2} - 2t\right) = 0$, ce qui équivaut à :

$$tx + y - \left(t^3 + 2 + \frac{1}{t^2} + 2t\right) = 0$$

b. La développée d'une courbe paramétrée est l'enveloppe de ses normales. Ainsi, le point de coordonnées (x, y) est sur la développée de Γ si, et seulement s'il existe $t < 0$ tel que :
$\begin{cases} tx + y - \left(t^3 + 2 + \dfrac{1}{t^2} + 2t\right) = 0 \\ x - \left(2 + 3t^2 - \dfrac{2}{t^3}\right) = 0 \end{cases}$, le déterminant de ce système étant bien non nul.

On en déduit une représentation paramétrique de la développée de Γ : $\begin{cases} x(t) = 2 + 3t^2 - \dfrac{2}{t^3} \\ y(t) = -2t^3 + 2 + \dfrac{3}{t^2} \end{cases}$, $t < 0$.

c. Le centre de courbure C_{-1} de Γ au point M_{-1} a pour coordonnées $(7, 7)$.
Le rayon de courbure R_{-1} de Γ au point M_{-1} est tel que $\overrightarrow{M_{-1}C_{-1}} = R_{-1}\overrightarrow{N_{-1}}$, où $\overrightarrow{N_{-1}}$ est le vecteur unitaire qui dirige la normale à Γ au point M_{-1}.

On a : $M_{-1} = (-1, -1), C_{-1} = (7, 7)$ et $\overrightarrow{N_{-1}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; on en déduit que $R_{-1} = -8\sqrt{2}$.

2. a. La tangente à Γ en M_{-1} est dirigée par $\overrightarrow{T_{-1}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc la tangente à $\mathscr{C}$ et la tangente à Γ en M_{-1} sont confondues si, et seulement si $\overrightarrow{T_{-1}} \,.\, \overrightarrow{\Omega M_{-1}} = 0$.
On en déduit que $4(a+1) - 4(b+1) = 0$ donc que $a = b$.
De plus, M_{-1} est sur $\mathscr{C}$ si, et seulement si $(a+1)^2 + (b+1)^2 = r^2$.
Finalement, $\mathscr{C}$ et Γ sont tangentes si, et seulement si $b = a$ et $r = \sqrt{2}|a+1|$.

b. $f_a(x, y) = (x-a)^2 + (y-a)^2 - 2(a+1)^2$.

c. On pose $t = u - 1$, et on a : $f_7(x(u-1), y - u - 1))\left(6 - u^2 + 2u + \dfrac{2}{1-u}\right)^2 + \left(9 - \dfrac{1}{(1-u)^2} - 2u\right)^2 - 128$.
Les DL usuels donnent : $f_7(x(u-1), y(u-1)) = o_{u \to 0}(u^3)$.

d. Pour $a = 7$, Ω est C_{-1} et et $r = |R_{-1}|$.
<u>Remarque</u> : Le cercle de centre C_{-1} et de rayon $|R_{-1}|$ (appelé *cercle osculateur*) est le cercle de meilleure approximation de Γ au voisinage de M_{-1}.