Math. - ES 1 - S1 - Analyse

mercredi 8 janvier 2020 - Durée 2 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin^n(x)\mathrm{d}x$$

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n est convergente.

b. Calculer I_0.

c. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$. On pourra utiliser la fonction à valeurs complexes $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{ix}$.

d. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, montrer, à l'aide de deux intégrations par parties successives, la relation :

$$I_n = \frac{n(n-1)}{n^2+1} I_{n-2}$$

e. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de I_{2n} en fonction de n et du produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(4k^2+1)$.

2. a. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$u_n = \ln\left(\frac{2n(2n-1)}{4n^2+1}\right)$$

Étudier la nature de la série $\sum u_n$.

b. Pour tout entier naturel non nul n, comparer $\ln(I_{2n})$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

c. Déterminer alors la limite de la suite (I_{2n}).

T.S.V.P.

EXERCICE 2

1. On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{n^n \sqrt{n}}{\mathrm{e}^n \; n!}$$

a. Exprimer, pour tout entier $n \geq 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n.

b. Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$, et en déduire un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c. La série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est-elle convergente ?

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente. Dans ce qui suit, on désigne par l, la limite de (u_n).

e. Donner, en fonction de l et n, un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On considère l'équation différentielle :

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - y = 0 \qquad (E)$$

Soit la série entière à coefficients réels $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, de somme

$$a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On suppose que a est solution de (E) sur $]-R, R[$, et n'est pas identiquement nulle.

a. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{(4n-3)(4n-5)}{8n(2n-1)} \; a_{n-1}$$

b. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

c. On suppose dans ce qui suit, que $a_0 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel $n \geq 1$, a_n en fonction de n.

d. Déterminer un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Fin de l'énoncé d'analyse