- ES-S1 - - 2019-2020 -

— Correction - Analyse —

EXERCICE 1

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin^n(x)\mathrm{d}x$$

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n est convergente.

$x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin^n(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, $\forall x \geq 0$, $\left|\mathrm{e}^{-x}\sin^n(x)\right| \leq \mathrm{e}^{-x}$, donc comme $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ est une intégrale de référence convergente, on conclut par comparaison que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin^n(x)\mathrm{d}x$ converge absolument puis que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin^n(x)\mathrm{d}x$ converge.

b. Calculer I_0.

On a $I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1$.

c. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$. On pourra utiliser la fonction à valeurs complexes $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{ix}$.

Sur $\mathbb{R}$, $\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{ix}\mathrm{d}x = \frac{-1-i}{2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{ix}$ donc sur $\mathbb{R}$, $\int \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\frac{-1-i}{2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{ix}\right) = \frac{\sin(x)-\cos(x)}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

d. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, montrer, à l'aide de deux intégrations par parties successives, la relation :

$$I_n = \frac{n(n-1)}{n^2+1} I_{n-2}$$

Soit $n \geq 2$, $a > 0$ et $I_n(a) = \int_0^a \mathrm{e}^{-x}\sin^n(x)\mathrm{d}x$. On sait que $\lim_{a \to +\infty} I_n(a) = I_n$.

Soit $u : x \mapsto \sin^n(x)$ et $v : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$. u, v sont C^1 sur $[0, a]$ et, par intégration par parties, on obtient

$$I_n(a) = \int_0^a \mathrm{e}^{-x}\sin^n(x)\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\sin^n(x)\right]_0^a + n\int_0^a \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)\mathrm{d}x$$

C'est à dire

$$I_n(a) = -\mathrm{e}^{-a}\sin^n(a) + nJ_n(a)$$

où on a posé

$$J_n(a) = \int_0^a \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)\mathrm{d}x$$

Soit $f : x \mapsto \sin^{n-1}(x)$ et $g : x \mapsto \frac{\sin(x)-\cos(x)}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

f, g sont C^1 sur $[0, a]$ et, par intégration par parties, compte tenu de la question précédente, on obtient

$$J_n(a) = \left[\frac{\sin(x)-\cos(x)}{2}\mathrm{e}^{-x}\sin^{n-1}(x)\right]_0^a - \frac{n-1}{2}\int_0^a \left(\mathrm{e}^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x) - \mathrm{e}^{-x}\sin^{n-2}(x) + \mathrm{e}^{-x}\sin^n(x)\right)\mathrm{d}x$$

Ainsi

$$J_n(a) = \frac{\sin(a)-\cos(a)}{2}\mathrm{e}^{-a}\sin^{n-1}(a) - \frac{n-1}{2}J_n(a) + \frac{n-1}{2}\left(I_{n-2}(a) - I_n(a)\right)$$

Soit encore

$$J_n(a) = \frac{1}{1+\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\sin(a)-\cos(a)}{2}\mathrm{e}^{-a}\sin^{n-1}(a) + \frac{n-1}{2}\left(I_{n-2}(a) - I_n(a)\right)\right)$$

Puis , $-\mathrm{e}^{-a}\sin^n(a)$ et $\dfrac{\sin(a)-\cos(a)}{2}\mathrm{e}^{-a}\sin^{n-1}(a)$ tendent vers 0 lorsque a tend vers $+\infty$ (produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle). Par définition de la convergence des intégrales, on obtient

$$\lim_{a\to+\infty} J_n(a) = \frac{2}{n+1}\,\frac{n-1}{2}\,(I_{n-2}-I_n) = \frac{1}{n}\,I_n$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$\forall n \geq 2,\ I_n = \frac{n(n-1)}{n^2+1} I_{n-2}$$

e. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de I_{2n} en fonction de n et du produit $\prod\limits_{k=0}^{n}(4k^2+1)$.

On a alors $\forall k \geq 1,\ I_{2k} = \dfrac{2k(2k-1)}{4k^2+1} I_{2k-2}$ et comme, $I_0 \neq 0$, on en déduit par une récurrence immédiate que $\forall k \in \mathbb{N},\ I_{2k} \neq 0$. Puis $\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{I_{2k}}{I_{2k-2}} = \prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k(2k-1)}{4k^2+1}$, et par télescopage, $\dfrac{I_{2n}}{I_0} = \dfrac{(2n)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(4k^2+1)}$. On a donc

$$\forall n \geq 0,\ I_{2n} = \frac{(2n)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(4k^2+1)}$$

2. a. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$u_n = \ln\left(\frac{2n(2n-1)}{4n^2+1}\right)$$

Étudier la nature de la série $\sum u_n$.

$\forall n \geq 1,\ u_n = \ln\left(\dfrac{4n^2+1-1-2n}{4n^2+1}\right) = \ln\left(1-\dfrac{1+2n}{4n^2+1}\right)$ et donc, $u_n \sim -\dfrac{1+2n}{4n^2+1} \sim -\dfrac{1}{2n}$. Comme $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, on conclut que $\sum u_n$ diverge (vers $-\infty$ car à termes négatifs à partir d'un certain rang).

b. Pour tout entier naturel non nul n, comparer $\ln(I_{2n})$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

$$\forall n \geq 1,\ \ln(I_{2n}) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

c. Déterminer alors la limite de la suite (I_{2n}).
$\sum u_n$ diverge vers $-\infty$ donc la suite de ses sommes partielles $(\ln(I_{2n}))$ diverge vers $-\infty$. Par composition par la fonction exponentielle, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} I_{2n} = 0$$

EXERCICE 2

1. On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{n^n \sqrt{n}}{\mathrm{e}^n \ n!}$$

a. Exprimer, pour tout entier $n \geq 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n.

$\forall n \geq 1,\ u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

b. Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$, et en déduire un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On a

$$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \circ\left(x^3\right)$$

et

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1,\ \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&\underset{n \to +\infty}{=} -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\right) + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \sim \frac{1}{12n^2}$$

c. La série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est-elle convergente ?

Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, on conclut que $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge.

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente. Dans ce qui suit, on désigne par l, la limite de (u_n).

$\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ et la série télescopique $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ est de même nature que la suite $(\ln(u_n))$. Donc la suite $(\ln(u_n))$ converge (vers l') et par continuité de la fonction exponentielle, (u_n) est convergente, de limite $l = \mathrm{e}^{l'}$.

e. Donner, en fonction de l et n, un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Comme $l = \mathrm{e}^{l'} > 0$, on a $u_n \sim l$, c'est à dire $\dfrac{n^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n \ n!} \sim l$ et enfin $\quad n! \ \sim \ \dfrac{1}{l}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}.$

2. On considère l'équation différentielle :

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - y = 0 \qquad (E)$$

Soit la série entière à coefficients réels $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, de somme

$$a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On suppose que a est solution de (E) sur $]-R, R[$, et n'est pas identiquement nulle.

a. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{(4n-3)(4n-5)}{8n(2n-1)}\ a_{n-1}$$

a, somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et

$$a'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad a''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

a est solution de (E) sur $]-R, R[$ si, et seulement si,

$$\forall x \in]-R, R[,\ 16(x^2-x)a''(x) + (16x-8)a'(x) - a(x) = 0$$

Ce qui équivaut à

$$\forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} 16n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 16n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 16n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 8n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

Et par unicité du DSE en 0 de rayon non nul, c'est encore équivalent à

$$a_1 = -\frac{1}{8}a_0,\ a_2 = \frac{15}{48}a_1, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2,\ 8(n+1)(1+2n)a_{n+1} = (16n^2-1)a_n$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{(4n-1)(4n+1)}{8(n+1)(2n+1)} a_n$$

On a donc bien montré que

$$\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{(4n-3)(4n-5)}{8n(2n-1)}\ a_{n-1}$$

b. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
Tout d'abord, $a_0 \neq 0$, sinon, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0$ et a identiquement nulle (ce qui est exclu par hypothèse). Dès lors, par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $v_n = |a_n x^n|$ alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = \left|\frac{(4n-1)(4n+1)}{8(n+1)(2n+1)}\right| |x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|$$

Par le critère de D'Alembert,

Si $|x| < 1$ alors	$\sum a_n x^n$ converge absolument, et	$R \geq 1$
Si $|x| > 1$ alors	$\sum a_n x^n$ diverge grossièrement, et	$R \leq 1$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est donc $R = 1$.

c. On suppose dans ce qui suit, que $a_0 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel $n \geq 1$, a_n en fonction de n.
$a_0 = 1 \neq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(4k-3)(4k-5)}{8k(2k-1)}$, et par télescopage, cela nous donne :

$$\forall n \geq 1,\ a_n = -\frac{(4n)!}{(4n-1)4^{2n}\left((2n)!^2\right)}$$

d. Déterminer un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.
L'équivalent obtenu en **1.e)** nous permet d'écrire

$$a_n \sim -\frac{l}{4n\sqrt{n}}$$