Math. - ES 1 - S1 - Epreuve 1

lundi 4 janvier 2021 - Durée 2 h

EXERCICE 1

1. **Question préliminaire.**
Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie d, f un endomorphisme de E et λ un réel.
$\mathrm{Ker}(f)$ désigne le noyau de f, et $\mathrm{Im}(f)$ son image. On note $f^2 = f \circ f$. Enfin, Id_E est l'endomorphisme identité de E.

a. Démontrer que :

$$\mathrm{Ker}\left(f - \lambda \mathrm{Id}_E\right) \subset \mathrm{Ker}\left(f^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}_E\right)$$

Quel lien peut-on en déduire entre les valeurs propres de f et celles de f^2 ?

b. Démontrer que si $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$, alors

$$\dim\left(\mathrm{Ker}(f^2)\right) \geq \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) + 1$$

c. On désigne par χ_f et χ_{f^2} les polynômes caractéristiques respectifs de f et f^2. Démontrer que :

$$\chi_{f^2}(X^2) = (-1)^d \chi_f(X)\chi_f(-X)$$

2. Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
Soit f l'application définie, pour tout polynôme P de E, par :

$$f(P) = (X^2 - X + 1)P(-1) + (X^3 - X)P(0) + (X^3 + X^2 + 1)P(1)$$

a. Démontrer que f est un endomorphisme de E.

b. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Préciser leur dimension.

c. f est-il injectif ? Surjectif ?

d. Justifier que 0 est valeur propre de f . Que peut-on dire de sa multiplicité ?

e. Montrer que les polynômes $Q_1 = 3X^3 + 4X^2 - 3X + 4$ et $Q_2 = X^3 + X$ sont des vecteurs propres de f. Quelles sont les valeurs propres associées ?

f. A-t-on $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$?

g. Quelles sont les valeurs propres de f^2 ? En déduire que f^2 est diagonalisable.

h. f est-il trigonalisable ? Diagonalisable ? Préciser ses valeurs propres et les sous-espaces propres.

T.S.V.P. ▶

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On travaille dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, noté $(\cdot|\cdot)$. On désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{B} = (\ e_1, \dots,\ e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$ alors la projection sur F parallèlement à G est un endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $p \circ p = p$. On a alors $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$. Cette projection est dite orthogonale si de plus F et G sont orthogonaux.

1. Soit p un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$. En écrivant, pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, $u = p(u) + (u - p(u))$, montrer que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n,\ \|p(u)\| \leq \|u\|$$

2. Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\forall u \in \mathbb{R}^n,\ \|p(u)\| \leq \|u\|$$

a. Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$ et $y \in \mathrm{Ker}(p)$. En considérant le vecteur $u = x + \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda(x|y) \geq 0$$

En déduire que $(x|y) = 0$.

b. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

3. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On définit l'application f^* par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f^*(x) = \sum_{i=1}^{n} (f(e_i)|x)\, e_i$$

a. Vérifier que f^* est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b. En exprimant x dans la base $\mathscr{B}$, montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$(f(x)|y) = (x|f^*(y))$$

c. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$(f(x)|y) = (x|g(y))$$

Montrer que $g = f^*$.

4. Soit p un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$.

a. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$(p(x)|y) = (p(x)|p(y))$$

b. En déduire que $p = p^*$.

5. Soit p un projecteur.

a. Montrer que $\mathrm{Im}(p^*) \subset (\mathrm{Ker}(p))^\perp$.

b. Soit $y \in (\mathrm{Ker}(p))^\perp$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $(x - p(x)|y) = 0$.
En déduire que $y = p^*(y)$ puis que $(\mathrm{Ker}(p))^\perp \subset \mathrm{Im}((p^*)$.

c. Montrer que si $p = p^*$, alors p est un projecteur orthogonal.

Fin de l'énoncé