- ES-S1 - - 2020-2021 -

– Correction - Epreuve 1 –

EXERCICE 1

1. Question préliminaire.

Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie d, f un endomorphisme de E et λ un réel.
$\mathrm{Ker}(f)$ désigne le noyau de f, et $\mathrm{Im}(f)$ son image. On note $f^2 = f \circ f$. Enfin, Id_E est l'endomorphisme identité de E.

a. Démontrer que :

$$\mathrm{Ker}\left(f - \lambda \mathrm{Id}_E\right) \subset \mathrm{Ker}\left(f^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}_E\right)$$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\left(f - \lambda \mathrm{Id}_E\right)$. On a $\left(f - \lambda \mathrm{Id}_E\right)(x) = 0$ donc $f(x) = \lambda x$, puis $f^2(x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$; finalement, $\left(f^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}_E\right)(x) = 0$, c'est à dire $x \in \mathrm{Ker}\left(f^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}_E\right)$.

Quel lien peut-on en déduire entre les valeurs propres de f et celles de f^2 ?
Si λ est une valeur propre de f et x un vecteur propre associé, l'inclusion précédente prouve que x est un vecteur propre de f^2 pour la valeur propre λ^2. On conclut que $\{\lambda^2,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\} \subset \mathrm{Sp}(f^2)$.

b. Démontrer que si $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$, alors

$$\dim\left(\mathrm{Ker}(f^2)\right) \geq \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) + 1$$

D'après la question précédente appliquée à $\lambda = 0$, on a $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$, et donc
$\dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) \leq \dim\left(\mathrm{Ker}(f^2)\right)$.
D'autre part, soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ tel que $x \neq 0$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$ et donc, $0 = f(x) = f^2(y)$, d'où $y \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Comme $x = f(y) \neq 0$, $y \notin \mathrm{Ker}(f)$ et donc l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ est stricte, puis $\dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) < \dim\left(\mathrm{Ker}(f^2)\right)$, ce qui implique $\dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) + 1 \leq \dim\left(\mathrm{Ker}(f^2)\right)$.

c. On désigne par χ_f et χ_{f^2} les polynômes caractéristiques respectifs de f et f^2. Démontrer que :

$$\chi_{f^2}(X^2) = (-1)^d \chi_f(X)\chi_f(-X)$$

Par définition, $\chi_{f^2} = \det\left(X\mathrm{Id}_E - f^2\right)$ donc par factorisation et propriété du déterminant,

$$\begin{aligned}
\chi_{f^2}(X^2) &= \det\left(X^2\mathrm{Id}_E - f^2\right) \\
&= \det\left(X\mathrm{Id}_E - f\right) \circ \left(X\mathrm{Id}_E + f\right) \\
&= \det\left(X\mathrm{Id}_E - f\right) \det\left(X\mathrm{Id}_E + f\right) \\
&= \det\left(X\mathrm{Id}_E - f\right) \det\left(-\left(-X\mathrm{Id}_E - f\right)\right) \\
&= (-1)^d \det\left(X\mathrm{Id}_E - f\right) \det\left(-X\mathrm{Id}_E - f\right) \\
&= (-1)^d \chi_f(X)\chi_f(-X)
\end{aligned}$$

2. Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
Soit f l'application définie, pour tout polynôme P de E, par :

$$f(P) = (X^2 - X + 1)P(-1) + (X^3 - X)P(0) + (X^3 + X^2 + 1)P(1)$$

a. Démontrer que f est un endomorphisme de E.
f est clairement linéaire, et comme pour tout polynôme P de E, $f(P)$ est de degré au plus 3 et que $n \geq 3$, on conclut que $f(P) \in E$. f est donc bien un endomorphisme de E.

b. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Préciser leur dimension.
Soit $P \in E$. Alors, par identification, on a :

$$\begin{aligned} f(P) = 0 &\iff (X^2 - X + 1)P(-1) + (X^3 - X)P(0) + (X^3 + X^2 + 1)P(1) = 0 \\ &\iff (P(0) + P(1))\, X^3 + (P(-1) + P(1))\, X^2 + (-P(-1) - P(0))\, X + P(-1) + P(1) = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} P(0) + P(1) = 0 \\ P(-1) + P(1) = 0 \\ P(-1) + P(0) = 0 \\ P(-1) + P(1) = 0 \end{array} \right. \\ &\iff P(-1) = P(0) = P(1) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}(f) = \{X(X-1)(X+1)Q,\ Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X]\}$ ou encore
$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left\{X(X-1)(X+1), X(X-1)(X+1)X, X(X-1)(X+1)X^2, \ldots, X(X-1)(X+1)X^{n-3}\right\}$.
$\mathrm{Ker}(f)$ est donc engendré par une famille de polynômes échelonnée en degré qui est donc libre. Ceci en fait une base de $\mathrm{Ker}(f)$ qui est donc de dimension $n-2$.
Ensuite, on a $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}\left\{X^2 - X + 1, X^3 - X, X^3 + X^2 + 1\right\}$ et
$\dim\left(\mathrm{Vect}\left\{X^2 - X + 1, X^3 - X, X^3 + X^2 + 1\right\}\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left\{X, X^2 + 1, X^3\right\}\right) = 3$ car engendré par une famille de polynômes échelonnée en degré qui est donc libre. Le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ et donc l'égalité $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{X^2 - X + 1, X^3 - X, X^3 + X^2 + 1\right\}$ ou encore $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{X, X^2 + 1, X^3\right\}$.

c. f est-il injectif ? Surjectif ?
$\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension $n - 2 \geq 1$ donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ puis f non injectif. Et par suite, en dimension finie pour un endomorphisme, f non injectif équivaut à f non surjectif.

d. Justifier que 0 est valeur propre de f . Que peut-on dire de sa multiplicité ?
On sait que f est non injectif donc 0 est valeur propre de f de multiplicité au moins la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, c'est-à-dire $n-2$.

e. Montrer que les polynômes $Q_1 = 3X^3 + 4X^2 - 3X + 4$ et $Q_2 = X^3 + X$ sont des vecteurs propres de f. Quelles sont les valeurs propres associées ?
$f(Q_1) = 4Q_1$ et $Q_1 \neq 0$; on en déduit que Q_1 est vecteur propre de f associé à la valeur propre 4.
$f(Q_2) = 2Q_2$ et $Q_2 \neq 0$; on en déduit que Q_2 est vecteur propre de f associé à la valeur propre 2.

f. A-t-on $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$?
On a $X^3 - X = X(X+1)(X-1) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ donc $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$, et par suite, on n'a pas $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.

g. Quelles sont les valeurs propres de f^2 ? En déduire que f^2 est diagonalisable.
D'après la question **1.a)**, on sait que $0^2 = 0$, $2^2 = 4$ et $4^2 = 16$ sont valeurs propres de f^2.
Dans la question précédente, on a vu que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ donc d'après la question **1.b)**,
$\dim\left(\mathrm{Ker}(f^2)\right) \geq \dim(\mathrm{Ker}(f)) + 1 = n - 1$. Donc 0 est valeur propre de f^2 de multiplicité au moins $n-1$.
On a alors :
$\dim\left(\mathrm{Ker}(f^2)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2 - 4\mathrm{Id}_E\right)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2 - 16\mathrm{Id}_E\right)\right) \geq n - 1 + 1 + 1 = n + 1 = \dim(E)$ et ainsi
$\dim\left(\mathrm{Ker}(f^2)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2 - 4\mathrm{Id}_E\right)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2 - 16\mathrm{Id}_E\right)\right) = \dim(E)$, car les espaces propres sont en somme directe. Par conséquent,
$\dim\left(\mathrm{Ker}(f^2)\right) = n - 1$, $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2 - 4\mathrm{Id}_E\right)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2 - 16\mathrm{Id}_E\right)\right) = 1$, et les valeurs propres de f^2 sont 0, 4 et 16, de multiplicités respectives $n-1$, 1 et 1. On conclut que f^2 est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

h. f est-il trigonalisable ? Diagonalisable ? Préciser ses valeurs propres et les sous-espaces propres.
On sait que χ_f est unitaire, de degré $n+1 = \dim(E)$, et d'après les questions **2.d)** et **2.e)**, qu'il est divisible par $X^{n-2}(X-2)(X-4)$. Donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_f = X^{n-2}(X-2)(X-4)(X-a)$. χ_f est alors scindé dans $\mathbb{R}$ puis f est au moins trigonalisable.
D'après la question précédente, on sait aussi que $\chi_{f^2} = X^{n-1}(X-4)(X-16)$ et donc
$\chi_{f^2}(X^2) = X^{2n-2}(X^2-4)(X^2-16)$.

Par ailleurs, la question **1.c)** donne $\chi_{f^2}(X^2) = (-1)^d \chi_f(X)\chi_f(-X)$, c'est à dire ici

$$\begin{aligned} X^{2n-2}(X^2-4)(X^2-16) &= (-1)^{n+1}X^{n-2}(X-2)(X-4)(X-a)(-X)^{n-2}(-X-2)(-X-4)(-X-a) \\ &= X^{2n-4}(X^2-4)(X^2-16)(X^2-a^2) \end{aligned}$$

Ce qui montre que $a = 0$.
Finalement, $\chi_f = X^{n-1}(X-2)(X-4)$, donc 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$ et le sous-espace propre associé est de dimension $n-2$. Par conséquent f n'est pas diagonalisable.
De plus
$E_0(f) = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left\{X(X-1)(X+1), X(X-1)(X+1)X, X(X-1)(X+1)X^2, \ldots, X(X-1)(X+1)X^{n-3}\right\}$,
$E_2(f) = \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\{Q_2\}$ et $E_4(f) = \mathrm{Ker}\,(f - 4\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\{Q_1\}$.

EXERCICE 2
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On travaille dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, noté $(\cdot|\cdot)$. On désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{B} = (\, e_1, \ldots,\, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On rappelle que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$ alors la projection sur F parallèlement à G est un endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $p \circ p = p$. On a alors $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$. Cette projection est dite orthogonale si de plus F et G sont orthogonaux.

1. Soit p un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$. En écrivant, pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, $u = p(u) + (u - p(u))$, montrer que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n,\ \|p(u)\| \leq \|u\|$$

Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, $u = p(u) + (u - p(u))$, $p(u) \in \mathrm{Im}(p)$ et $p\left((u - p(u))\right) = p(u) - p^2(u) = 0$ donc $(u - p(u)) \in \mathrm{Ker}(p)$. Par conséquent, $p(u)$ et $(u - p(u))$ sont orthogonaux, puis par le théorème de Pythagore, $\|u\|^2 = \|p(u) + (u - p(u))\|^2 = \|p(u)\|^2 + \|u - p(u)\|^2 \geq \|p(u)\|^2$ et enfin $\|p(u)\| \leq \|u\|$.

2. Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\forall u \in \mathbb{R}^n,\ \|p(u)\| \leq \|u\|$$

a. Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$ et $y \in \mathrm{Ker}(p)$. En considérant le vecteur $u = x + \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda(x|y) \geq 0$$

Posons $u = x+\lambda y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors $\|p(x+\lambda y)\| \leq \|x+\lambda y\|$, soit encore $\|p(x)+\lambda p(y)\| \leq \|x+\lambda y\|$, c'est-à-dire $\|x\| \leq \|x+\lambda y\|$ puisque $x \in \mathrm{Im}(p)$ et $y \in \mathrm{Ker}(p)$. Dès lors, en élevant au carré, et en utilisant une identité de polarisation, on obtient $\|x\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\lambda(x|y) + \lambda^2\|y\|^2$ soit finalement $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda(x|y) \geq 0$.

En déduire que $(x|y) = 0$.
Si $y = 0$ alors $(x|y) = 0$. Sinon $\|y\|^2 > 0$ et $\lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda(x|y)$ est un trinôme du second degré en λ. Ce dernier est positif si, et seulement si son discriminant est négatif ou nul, c'est à dire $4(x|y)^2 \leq 0$, ce qui est équivalent à $(x|y) = 0$.

b. Montrer que p est un projecteur orthogonal.
p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$, or $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$ comme prouvé à la question précédente, donc p est un projecteur orthogonal.

3. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On définit l'application f^* par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f^*(x) = \sum_{i=1}^{n} (f(e_i)|x)\, e_i$$

a. Vérifier que f^* est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f^*(x) \in \mathbb{R}^n$ et la linéarité de f^* découle de la bilinéarité de produit scalaire.

b. En exprimant x dans la base $\mathscr{B}$, montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$(f(x)|y) = (x|f^*(y))$$

On décompose $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ dans la base canonique, et comme celle-ci est orthonormée pour le produit scalaire usuel, on a $x_i = (x|e_i)$. En utilisant la linéarité de f et la bilinéarité du produit scalaire, on a d'une part $(f(x)|y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)|y\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i (f(e_i)|y)$, et
d'autre part $(x|f^*(y)) = \left(x|\sum_{i=1}^{n}(f(e_i)|y)e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(f(e_i)|y)(x|e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i(f(e_i)|y)$, d'où l'égalité.

c. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$(f(x)|y) = (x|g(y))$$

Montrer que $g = f^*$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a $(f(x)|y) = (x|g(y))$ donc $(x|f^*(y)) = (x|g(y))$ puis $(x|f^*(y) - g(y)) = 0$. En particulier, pour $x = f^*(y) - g(y)$, on obtient $\forall y \in \mathbb{R}^n, (f^*(y) - g(y)|f^*(y) - g(y)) = \|f^*(y) - g(y)\|^2 = 0$, ce qui donne $\forall y \in \mathbb{R}^n,\ f^*(y) - g(y) = 0$. On a donc montré que $\forall y \in \mathbb{R}^n,\ g(y) = f^*(y)$ ou encore $g = f^*$.

4. Soit p un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$.

a. Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$(p(x)|y) = (p(x)|p(y))$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On a $(p(x)|y) - (p(x)|p(y)) = (p(x)|y - p(y)) = 0$
puisque $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$, $y - p(y) \in \mathrm{Ker}(p)$, et par hypothèse $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$.

b. En déduire que $p = p^*$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Alors $(x|p(y)) = (p(y)|x) \underset{\textbf{4.a)}}{=} (p(y)|p(x)) = (p(x)|p(y)) \underset{\textbf{4.a)}}{=} (p(x)|y)$.
D'après **3.c)**, on peut conclure que $p = p^*$.

5. Soit p un projecteur.

a. Montrer que $\mathrm{Im}(p^*) \subset (\mathrm{Ker}(p))^\perp$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(p^*)$ et $y \in \mathrm{Ker}(p)$. Alors $\exists z \in \mathbb{R}^n,\ (x|y) = (p^*(z)|y) \underset{\textbf{3.b)}}{=} (z|p(y)) = (z|0) = 0$.
On a donc montré que $\mathrm{Im}(p^*) \subset (\mathrm{Ker}(p))^\perp$.

b. Soit $y \in (\mathrm{Ker}(p))^\perp$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $(x - p(x)|y) = 0$.
Soit $y \in (\mathrm{Ker}(p))^\perp$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ donc $(x - p(x)|y) = 0$.

En déduire que $y = p^*(y)$ puis que $(\mathrm{Ker}(p))^\perp \subset \mathrm{Im}((p^*)$.
Par linéarité à gauche, on obtient $(x|y) = (p(x)|y) \underset{\textbf{3.b)}}{=} (x|p^*(y))$ puis par linéarité à droite, $(x|y - p^*(y)) = 0$.
En particulier, pour $x = y - p^*(y)$, on a $(y - p^*(y))|y - p^*(y)) = 0 = \|y - p^*(y)\|^2$ donc $y - p^*(y) = 0$, soit encore $y = p^*(y)$.
On a montré que pour tout $y \in (\mathrm{Ker}(p))^\perp$, $y \in \mathrm{Im}(p^*)$, c'est à dire $(\mathrm{Ker}(p))^\perp \subset \mathrm{Im}(p^*)$.

c. Montrer que si $p = p^*$, alors p est un projecteur orthogonal.
D'après **5.a)** et **5.b)**, on a $(\mathrm{Ker}(p))^\perp = \mathrm{Im}(p^*) = \mathrm{Im}(p)$ donc p est un projecteur orthogonal.