Math. - ES 1 - S1 - Epreuve 2

lundi 4 janvier 2021 - Durée 2 h

*On s'intéresse dans ce problème à l'équation différentielle $x^2y'' + axy' + by = 0$. La **partie I** est une partie d'algèbre linéaire qui traite des solutions polynomiales de cette équation lorsque a et b sont des constantes réelles. Dans la **partie II**, on détermine l'ensemble des solutions de l'équation lorsque a et b sont des constantes réelles. La **partie III** traite des solutions lorsque $a = 1$ et b est la fonction carrée.*
Les trois parties sont indépendantes.

PARTIE I - Endomorphismes

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b des constantes réelles.
On note Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Delta(P) = XP'$$

1. Calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\Delta(X^k)$.

2. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], X^2P'' = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P)$$

où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}[X]$.

3. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ .
On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ.

4. Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP$$

Exprimer φ en fonction de Δ, et en déduire que φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
On notera φ_n l'endomorphisme induit.

6. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. On considère l'équation

$$s^2 + (a - 1)s + b = 0 \quad (1)$$

a. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières $m_1, m_2 \in [\![0, n]\!]$.

b. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in [\![0, n]\!]$.

c. Déterminer le noyau de φ.

PARTIE II - Une équation différentielle

On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \qquad (\mathrm{H}_0)$$

où a et b sont des constantes réelles, et on note $I =]0, +\infty[$.

1. Montrer que si y est solution de (H_0) sur I, alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$u'' + (a-1)u' + bu = 0 \qquad (\mathrm{H}_1)$$

2. Réciproquement, soit g une solution de (H_1) sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g \circ \ln$ est solution de (H_0) sur I.

3. Dans cette question on suppose que $a = 3$ et $b = 1$.

a. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (H_1).

b. En déduire les solutions à valeurs réelles de l'équation (H_0) sur l'intervalle I.

c. Après vous être assuré que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ figure bien parmi les solutions sur I de (H_0), résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x} \qquad (\mathrm{L}_0)$$

PARTIE III - Une équation de Bessel

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \qquad (\mathrm{H}_2)$$

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

2. Série entière dont la somme est solution de $(\mathbf{H}_2)$

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence $R > 0$, dont la fonction somme S est solution de (H_2) sur $]-R, R[$.

a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} = 0 \\ c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} \end{cases}$$

b. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$.

3. Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_a > 0$ telle que $a_0 = 1$.
L'objectif de cette question est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k\geq 0} b_k x^k$ de rayon de convergence $R_b > 0$ telle que pour tout x dans les domaines de convergence :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k\right) = 1$$

a. Montrer que si $\sum_{k\geq 0} b_k x^k$ est solution, alors la suite (b_k) satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{2}$$

b. Soit r un réel tel que $0 < r < R_a$.
Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|a_k| \leq \frac{M}{r^k}$$

c. Montrer que (2) admet une unique solution $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|b_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$$

d. Que peut-on dire du rayon de convergence R_b ?

4. Ensemble des solutions de $(\mathbf{H}_2)$

a. Justifier qu'il existe un réel $r > 0$, tel que S ne s'annule pas sur $[0, r[$.

b. Soit λ une fonction de classe C^2 sur $]0, r[$.
Montrer que la fonction $y : x \mapsto \lambda(x)S(x)$ est solution de (H_2) sur $]0, r[$ si, et seulement si la fonction $x \mapsto xS^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$.

c. Montrer que S^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $S^2(0)$?

d. En déduire l'existence d'une fonction μ somme d'une série entière de rayon de convergence $R_m > 0$ telle que $x \mapsto \mu(x) + S(x)\ln(x)$ soit solution de (H_2) sur un intervalle $]0, R_m[$.

e. En déduire l'ensemble des solutions de (H_2) sur $]0, R_m[$, à l'aide des fonctions définies au fil du problème.

Fin de l'énoncé