- ES-S1 - - 2020-2021 -

– Correction - Epreuve 2 –

PARTIE I - Endomorphismes

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b des constantes réelles.
On note Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Delta(P) = XP'$$

1. Calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\Delta(X^k)$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!], \Delta(X^k) = XkX^{k-1} = kX^k$; pour $k = 0, \Delta(X^0) = X \times 0 = 0 = 0 \times X^0$.
Donc pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\Delta(X^k) = kX^k$$

2. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], X^2P'' = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P)$$

où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X], \Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P) = \Delta(XP' - P) = X(P' + XP'' - P') = X^2P''$.

3. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ .

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $XP' \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ.

4. Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

D'après la première question, on obtient immédiatement la matrice diagonale suivante :

$$\mathrm{mat}(\Delta_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

5. On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP$$

Exprimer φ en fonction de Δ, et en déduire que φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
On notera φ_n l'endomorphisme induit.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. D'après la deuxième question, $(\Delta^2 - \Delta)(P) = X^2P''$.
On a donc $(\Delta^2 + (a-1)\Delta + b\,\mathrm{Id})(P) = (\Delta^2 - \Delta)(P) + a\Delta(P) + bP = X^2P'' + aXP' + bP = \varphi(P)$. D'où :

$$\varphi = \Delta^2 + (a-1)\Delta + b\,\mathrm{Id}$$

Comme Δ induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$, un raisonnement analogue en remplaçant $\mathbb{R}[X]$ par $\mathbb{R}_n[X]$ donne que φ induit un endomorphisme φ_n sur $\mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\varphi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n + b\,\mathrm{Id}_n$$

6. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

D'après la quatrième question, la matrice de Δ_n est diagonale avec pour éléments diagonaux les entiers k, pour $k \in [\![0, n]\!]$.
On déduit de la question précédente, que la matrice de φ_n est également diagonale, avec pour éléments diagonaux $k^2 + (a-1)k + b$, pour $k \in [\![0, n]\!]$.

7. On considère l'équation

$$s^2 + (a-1)s + b = 0 \quad (1)$$

a. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières $m_1, m_2 \in [\![0, n]\!]$.

Lorsque l'équation (1) admet deux solutions entières m_1 et m_2 dans $[\![0, n]\!]$, alors la matrice de φ_n admet exactement deux fois 0 sur la diagonale, aux colonnes $m_1 + 1$ et $m_2 + 1$. De plus, elle est diagonale.
On en déduit que 0 est valeur propre double et que $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathrm{E}_0(\varphi_n) = \mathrm{Vect}\{X^{m_1}, X^{m_2}\}$.

b. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in [\![0, n]\!]$.

Lorsque l'équation (1) admet une seule solution entière m dans $[\![0, n]\!]$, alors la matrice de φ_n admet exactement une fois 0 sur la diagonale, à la colonne $m + 1$. De plus, elle est diagonale.
On en déduit que 0 est valeur propre simple et que $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathrm{E}_0(\varphi_n) = \mathrm{Vect}\{X^m\}$

c. Déterminer le noyau de φ.

Comme précédemment si (1) n'admet pas de solution entière dans $[\![0, n]\!]$, alors 0 n'est pas valeur propre de φ et $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \{0\}$.
Si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \setminus \{0\}$, notons $n = \deg(P)$. Alors $\varphi(P) = \varphi_n(P) = 0$ et $P \in \mathrm{Ker}(\varphi_n)$.
On en déduit que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Ker}(\varphi_n)$. D'où :

- Si (1) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$, alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$
- Si (1) admet une solution entière $m \in \mathbb{N}$ alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\{X^m\}$
- Si (1) admet deux solutions entières m_1 et m_2 dans $\mathbb{N}$, alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\{X^{m_1}, X^{m_2}\}$.

PARTIE II - Une équation différentielle

On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$x^2 y'' + axy' + by = 0 \qquad (\mathrm{H}_0)$$

où a et b sont des constantes réelles, et on note $I =]0, +\infty[$.

1. Montrer que si y est solution de (H_0) sur I, alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$u'' + (a-1)u' + bu = 0 \qquad (\mathrm{H}_1)$$

Soit y une solution de (H_0) sur I. On pose $g = y \circ \exp$.
g est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$g'(x) = y'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x; \quad g''(x) = y''(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{2x} + y'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x$.
On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$, en notant $t = \mathrm{e}^x \in I$:
$g''(x) + (a-1)g'(x) + bg(x) = y''(t)t^2 + ay'(t)t + by(t) = 0$ car y est solution de (H_0) sur I.
On en déduit que $g = y \circ \exp$ est solution de (H_1) sur $\mathbb{R}$.

2. Réciproquement, soit g une solution de (H_1) sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g \circ \ln$ est solution de (H_0) sur I.

Soit g une solution de (H_1) sur $\mathbb{R}$. On pose $h = g \circ \ln$.
h est définie et deux fois dérivable sur I par composition, et pour tout $x \in I$, on a :

$h'(x) = g'(\ln(x))\dfrac{1}{x}$; $\quad h''(x) = g''(\ln(x))\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}g'(\ln(x))$.
On a alors, pour $x \in I$, en notant $t = \ln(x) \in \mathbb{R}$:
$x^2h''(x) + axh'(x) + bh(x) = g''(t) + (a-1)g'(t) + bg(t) = 0$ car g est solution de (H_1).
On en déduit que $h = g \circ \ln$ est solution de (H_0) sur I.

3. Dans cette question on suppose que $a = 3$ et $b = 1$.

a. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (H_1).

Pour $a = 3$ et $b = 1$, (H_1) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants dont l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ admet -1 pour solution double.
On en déduit que les solutions sont : $u : t \mapsto (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{-t}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

b. En déduire les solutions à valeurs réelles de l'équation (H_0) sur l'intervalle I.

On déduit des questions précédentes que les solutions de (H_0) sur I sont :

$$y : x \mapsto \frac{\lambda \ln(x) + \mu}{x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

c. Après vous être assuré que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ figure bien parmi les solutions sur I de (H_0), résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x} \qquad (\mathrm{L}_0)$$

On a bien trouvé que $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une solution de (H_1) sur I, où elle ne s'annule pas.
On cherche une solution de (L_0) sous la forme $y = \lambda h$ où λ est deux fois dérivable sur I.
y est solution de (L_0) sur I si, et seulement si pour tout $x \in I$:
$x^2(\lambda''h + 2\lambda'h' + \lambda h'') + 3x(\lambda'h + \lambda h') + \lambda h = \dfrac{1}{x}$.
Comme h est solution de (H_0), cela équivaut à : $x\lambda'' + \lambda' = \dfrac{1}{x}$.
λ' est donc solution de l'équation différentielle $\quad (\mathrm{L}_1) : xy' + y = \dfrac{1}{x}$.
Les solutions de l'équation homogène $xy' + y = 0$ sont de la forme $x \mapsto \dfrac{C}{x}$, où $C \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \dfrac{C}{x}$ où C est une fonction dérivable sur I, et on obtient $y_p : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
On en déduit qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \in I$, $\lambda'(x) = \dfrac{C_1 + \ln(x)}{x}$ et par suite qu'il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \in I$, $\lambda(x) = C_1\ln(x) + \dfrac{1}{2}(\ln(x))^2 + C_2$.
Finalement, les solutions de (L_1) sur I sont :

$$y : x \mapsto \frac{C_1 \ln(x) + C_2}{x} + \frac{(\ln(x))^2}{2x}, \qquad \text{avec, } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

PARTIE III - Une équation de Bessel

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \qquad (\mathrm{H}_2)$$

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_k x^k$ est

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ / (a_k r^k)_k \text{ est bornée } \}$$

2. Série entière dont la somme est solution de ($\mathbf{H}_2$)

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence $R > 0$, dont la fonction somme S est solution de (H_2) sur $]-R, R[$.

a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} = 0 \\ c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} \end{cases}$$

S est de classe C^∞ sur $]-R, R[$, et d'après le théorème de dérivation d'une série entière pour tout $x \in]-R, R[$:
$S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1}$ et $S''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}$.
En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient pour tout $x \in]-R, R[$:
$c_1 x + \sum_{k=2}^{+\infty} (k^2 c_k + c_{k-2}) x^k = 0$
Par unicité du développement en série entière, on en déduit :

$$c_1 = 0 \qquad \text{et} \quad \forall k \geq 2, c_k = -\frac{c_{k-2}}{k^2}$$

Comme de plus $c_0 = 1$, une récurrence immédiate donne le résultat attendu.

b. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$.

On s'intéresse à la série entière $\sum c_{2k} x^{2k}$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \neq 0$, on note $u_k(x) = c_{2x} x^{2k}$.
On a : $\left|\dfrac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right| = \left|\dfrac{x^2}{4(k+1)^2}\right| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum u_k(x)$ converge donc pour tout réel $x \neq 0$, et elle converge également pour $x = 0$.
On en déduit que la série entière $\sum c_{2k} x^{2k}$ a un rayon de convergence infini.

3. Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_a > 0$ telle que $a_0 = 1$.
L'objectif de cette question est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k\geq 0} b_k x^k$ de rayon de convergence $R_b > 0$ telle que pour tout x dans les domaines de convergence :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k\right) = 1$$

a. Montrer que si $\sum_{k\geq 0} b_k x^k$ est solution, alors la suite (b_k) satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{2}$$

Par produit de Cauchy, appliqué aux séries entières qui sont absolument convergentes dans l'intervalle ouvert de convergence, en notant $R_m = \min(R_a, R_b)$ on obtient :

$$\forall x \in]-R_m, R_m[, \qquad \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n.$$

Par hypothèse cette somme vaut 1, donc par unicité du développement en série entière, on a :

$$a_0\, b_0 = 1 \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$$

Comme par hypothèse $a_0 = 1$, on obtient le résultat attendu.

b. Soit r un réel tel que $0 < r < R_a$.
Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|a_k| \leq \frac{M}{r^k}$$

Comme $0 < r < R_a$, par définition du rayon de convergence, la suite $(a_k r^k)_k$ est bornée, donc

$$\exists M > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad |a_k r^k| \leq M \qquad \text{i.e.} \quad |a_k| \leq \frac{M}{r^k}$$

c. Montrer que (2) admet une unique solution $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|b_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note H_k l'assertion :
" b_k est défini de façon unique et $|b_k| \leq \dfrac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$ ".

- Initialisation : d'après la relation (2), $a_0\, b_1 + a_1\, b_0 = 0$ avec $a_0 = b_0 = 1$ donc $b_1 = -a_1$ et $|b_1| = |a_1| \leq \dfrac{M}{r}$.
  L'assertion H_1 est donc vérifiée.
- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $H_1, \cdots, H_k$ sont vraies.
  D'après la relation (2), sachant que $a_0 = 1$, on a :
  $b_{k+1} = -\displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_{k+1-i} b_i$ ce qui définit b_{k+1} de façon unique, et
  $|b_{k+1}| \leq \displaystyle\sum_{i=0}^{k} |a_{k+1-i}|\, |b_i| \leq \frac{M}{r^{k+1}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{M}{r^{k+1-i}} \times \frac{M(M+1)^{i-1}}{r^i}$
  d'après la question précédente, et l'hypothèse de récurrence.
  On obtient alors $|b_{k+1}| \leq \dfrac{M}{r^{k+1}} + \dfrac{M^2}{r^{k+1}} \times \dfrac{(M+1)^k - 1}{(M+1) - 1} = \dfrac{M(M+1)^k}{r^{k+1}}$

d. Que peut-on dire du rayon de convergence R_b ?

D'après la question précédente, pour $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $|b_k x^k| \leq \dfrac{M}{M+1} \left| \dfrac{(M+1)x}{r} \right|^k$.

Ainsi, d'après le théorème de comparaison sur les séries, si $\left| \dfrac{(M+1)x}{r} \right| < 1$, la série géométrique $\sum \left(\dfrac{(M+1)x}{r} \right)^k$ étant absolument convergente, il en est de même que la série $\sum b_k x^k$.

On en déduit que si $|x| < \dfrac{r}{M+1}$ alors la série $\sum b_k x^k$ est absolument convergente, et donc que

$$R_b \geq \frac{r}{M+1} > 0$$

4. Ensemble des solutions de $(\mathbf{H}_2)$

a. Justifier qu'il existe un réel $r > 0$, tel que S ne s'annule pas sur $[0, r[$.

$S(0) = c_0 \neq 0$ donc, S étant continue, il existe un voisinage de 0 sur lequel S ne s'annule pas.

b. Soit λ une fonction de classe C^2 sur $]0,r[$.
Montrer que la fonction $y : x \mapsto \lambda(x)S(x)$ est solution de (H_2) sur $]0,r[$ si, et seulement si la fonction $x \mapsto xS^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0,r[$.

On note pour $x \in]0,r[, y(x) = \lambda(x)S(x)$, où λ est de classe C^2 sur $]0,r[$.
Par produit, y est de classe C^2 sur $]0,r[$, et comme S est solution de (H_2), on obtient pour tout $x \in]0,r[$:
$x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = x^2\lambda''(x)S(x) + 2x^2\lambda'(x)S'(x) + x\lambda'(x)S(x)$.
De plus, en notant $\forall x \in]0,r[, u(x) = x\lambda'(x)S(x)^2$, on a :
$\forall x \in]0,r[, u'(x) = \lambda'(x)S(x)^2 + x\lambda''(x)S(x)^2 + x\lambda'(x)2S(x)S'(x) = \dfrac{S(x)}{x}\left(x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x)\right)$.
S ne s'annulant pas sur $]0,r[$, on en déduit que y est solution de (H_2) sur $]0,r[$, si et seulement si u est de dérivée nulle sur $]0,r[$.

c. Montrer que S^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $S^2(0)$?

D'après le théorème sur le produit de Cauchy pour les séries entières, S^2 est la somme d'une série entière de rayon $+\infty$, et $S(0)^2 = 1$.

d. En déduire l'existence d'une fonction μ somme d'une série entière de rayon de convergence $R_m > 0$ telle que $x \mapsto \mu(x) + S(x)\ln(x)$ soit solution de (H_2) sur un intervalle $]0, R_m[$.

On cherche une fonction λ et un réel $r > 0$ tels que S ne s'annule pas sur $]0,r[$ et $\forall x \in]0,r[, xS(x)^2\lambda'(x) = 1$.
D'après la question **4.b**, on aura alors $x \mapsto \lambda(x)S(x)$ solution de (H_2) sur $]0,r[$.
La question **4.c** permet d'appliquer à S^2 la question **3.** sur l'inverse d'une série entière non nulle en 0.
Il existe donc une série entière $\sum b_kx^k$ de rayon $r > 0$ telle que $b_0 = 1$ qui vérifie pour tout $x \in]0,r[$:
$S(x)^2\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_kx^k\right) = 1$ ce qui s'écrit également, x étant non nul, $xS(x)^2\left(\dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_kx^{k-1}\right) = 1$
On remarque au produit non nul que S ne s'annule pas sur $]0,r[$.
En prenant, pour $x \in]0,r[$, $\quad \lambda(x) = \ln(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_k\frac{x^k}{k}$, on obtient pour $x \in]0,r[, xS(x)^2\lambda'(x) = 1$.
On note alors, pour $x \in]0,r[$, $\quad \mu(x) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_k\frac{x^k}{k}\right) \times S(x)$.
Par produit de Cauchy, μ est la somme d'une série entière de rayon $R_m > 0$ et d'après ce qui précède, la fonction $x \mapsto \mu(x) + \ln(x)S(x)$ est solution de (H_2) sur $]0, R_m[$.

e. En déduire l'ensemble des solutions de (H_2) sur $]0, R_m[$, à l'aide des fonctions définies au fil du problème.

La fonction μ est continue sur $[0, R_m[$ comme somme de série entière et $S(0) = 1$; on en déduit que la fonction $S_1 = \mu + S \times \ln$ n'est pas bornée sur $]0, R_m[$. Or, comme S est continue sur $\mathbb{R}$, elle l'est en particulier sur $[0, R_m]$ elle est donc bornée sur ce segment, de plus elle n'est pas nulle. Si la famille (S, S_1) était liée sur $]0, R_m[$, il existerait $a \in \mathbb{R}$ tel que $S_1 = aS$ et S_1 serait elle aussi bornée sur $]0, R_m[$.
On en déduit que (S, S_1) est libre dans l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0, R_m[$, et que l'on a une base de solutions de (H_2).
On en déduit que l'ensemble des solutions de (H_2) sur $]0, R_m[$ est :

$$\mathrm{Vect}\{S, S_1\} = \{AS + B(\mu + S \times \ln), (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$