⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆ - 2020-2021 -

Math. - ES 2 - S2 - Epreuve 1

lundi 17 mai 2021 - Durée 2 h

EXERCICE 1

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère le point A de coordonnées (a, b), où $a, b \in \mathbb{R}$.,

A chaque point A du plan, on associe la courbe Γ_A ayant pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = t^3 + 3t^2 - at \\ y(t) = t^3 - 3t^2 - bt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Étude de Γ_A dans le cas où $a = b = 9$

a. Montrer que Γ_A possède un axe de symétrie que l'on précisera. On étudiera donc x et y sur $\mathbb{R}_+$.

b. Étudier les variations de x et de y ; on consignera les résultats dans un tableau de variations en précisant les tangentes verticales, horizontales et la tangente au point de paramètre 0.

c. Étudier la branche infinie de la restriction de Γ_A à $\mathbb{R}_+$.

d. Tracer Γ_A sur **la feuille annexe**.

2. On revient au cas général

a. Montrer que la courbe Γ_A possède un point singulier si et seulement si A appartient à une courbe $\mathscr{P}$ dont on donnera une équation.

b. Montrer que $\mathscr{P}$ est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques.

c. Tracer $\mathscr{P}$ sur **la feuille annexe**.

EXERCICE 2

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Une première étude

On considère la surface $\mathscr{S}$ paramétrée par $\begin{cases} x = u^2 \\ y = uv \\ z = u^2 + v \end{cases}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

a. Déterminer l'ensemble des points non réguliers de $\mathscr{S}$.

b. Donner une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$ en tout point régulier de $\mathscr{S}$.

Dans la suite de l'exercice, U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et a, b, c et d quatre fonctions de classe C^1 sur U. On considère la famille de plans $(P_{u,v})_{(u,v)\in U}$ d'équation cartésienne

$$a(u, v)x + b(u, v)y + c(u, v)z = d(u, v)$$

L'objectif est de déterminer une surface Σ dont l'ensemble des plans tangents est la famille $(P_{u,v})_{(u,v)\in U}$. Pour cela, on considère un paramétrage régulier

$$(u, v) \in U \ \mapsto \ M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

de la surface Σ tel que pour tout $(u, v) \in U$, le plan tangent à Σ au point $M(u, v)$ est le plan $P_{u,v}$.

T.S.V.P. ▶

2. $\boxed{\text{Cas général}}$

a. Démontrer que la surface Σ convient si et seulement si

$$\forall (u,v) \in U, \quad \begin{cases} a(u,v)x(u,v) + b(u,v)y(u,v) + c(u,v)z(u,v) = d(u,v) & (\textbf{Eq1}) \\ a(u,v)\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + b(u,v)\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) + c(u,v)\dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v) = 0 & (\textbf{Eq2}) \\ a(u,v)\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) + b(u,v)\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) + c(u,v)\dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v) = 0 & (\textbf{Eq3}) \end{cases}$$

On note $(\mathscr{S}_1)$ ce système.

b. Démontrer soigneusement que le système $(\mathscr{S}_1)$ est équivalent au système $(\mathscr{S}_2)$ suivant

$$\forall (u,v) \in U, \quad \begin{cases} a(u,v)x(u,v) + b(u,v)y(u,v) + c(u,v)z(u,v) = d(u,v) & (\textbf{Eq1}) \\ \dfrac{\partial a}{\partial u}(u,v)x(u,v) + \dfrac{\partial b}{\partial u}(u,v)y(u,v) + \dfrac{\partial c}{\partial u}(u,v)z(u,v) = \dfrac{\partial d}{\partial u}(u,v) & (\textbf{Eq4}) \\ \dfrac{\partial a}{\partial v}(u,v)x(u,v) + \dfrac{\partial b}{\partial v}(u,v)y(u,v) + \dfrac{\partial c}{\partial v}(u,v)z(u,v) = \dfrac{\partial d}{\partial v}(u,v) & (\textbf{Eq5}) \end{cases}$$

On note alors $(\mathscr{S}_3)$ le système

$$\begin{cases} a(u,v)X + b(u,v)Y + c(u,v)Z = d(u,v) \\ \dfrac{\partial a}{\partial u}(u,v)X + \dfrac{\partial b}{\partial u}(u,v)Y + \dfrac{\partial c}{\partial u}(u,v)Z = \dfrac{\partial d}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial a}{\partial v}(u,v)X + \dfrac{\partial b}{\partial v}(u,v)Y + \dfrac{\partial c}{\partial v}(u,v)Z = \dfrac{\partial d}{\partial v}(u,v) \end{cases}$$

3. $\boxed{\text{Une application}}$

Dans cette question, $U = \mathbb{R}^2$ et a, b, c et d sont les fonctions

$$a : (u,v) \mapsto 2u^2 + v \qquad b : (u,v) \mapsto 1 - (2u^2 + v) \qquad c : (u,v) \mapsto u \qquad d : (u,v) \mapsto uv + u^3$$

a. Vérifier que la matrice du système $(\mathscr{S}_3)$ est inversible pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

b. Résoudre $(\mathscr{S}_3)$.

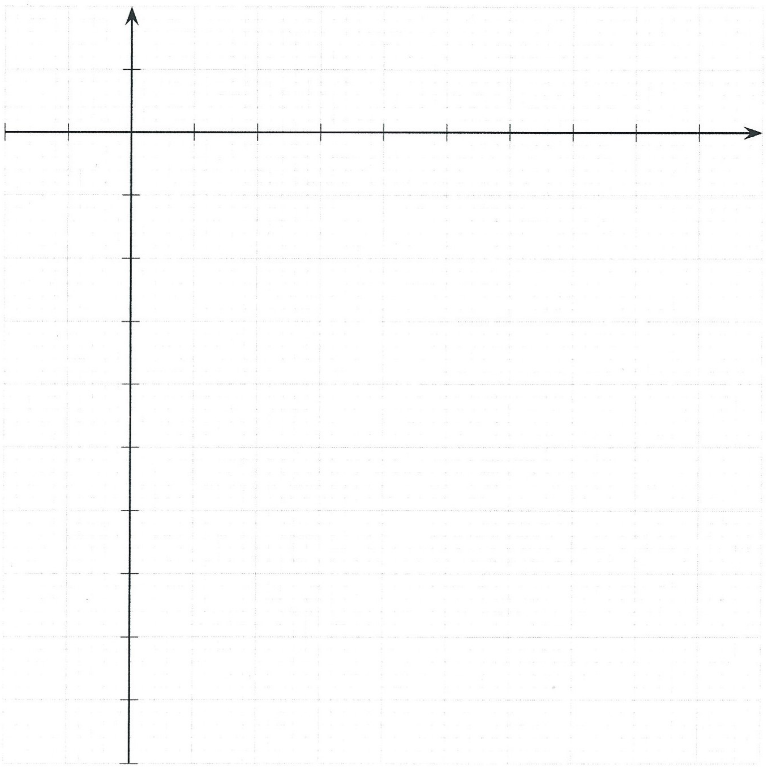
c. Vérifier que le paramétrage ainsi trouvé est régulier.

Fin de l'énoncé

Nom, Prénom :

À RENDRE AVEC LA COPIE

$\boxed{\text{Tracé de } \Gamma_A}$



$\boxed{\text{Tracé de } \mathscr{P}}$