- ES-S2 - - 2020-2021 -

– Correction - Epreuve 1 –

EXERCICE 1
Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère le point A de coordonnées (a, b), où $a, b \in \mathbb{R}$.,
A chaque point A du plan, on associe la courbe Γ_A ayant pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = t^3 + 3t^2 - at \\ y(t) = t^3 - 3t^2 - bt \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

1. $\boxed{\text{Étude de } \Gamma_A \text{ dans le cas où } a = b = 9}$

a. Montrer que Γ_A possède un axe de symétrie que l'on précisera. On étudiera donc x et y sur $\mathbb{R}_+$.
On constate que pour tout réel $t, x(-t) = -y(t)$ et $y(-t) = -x(t)$, donc le point de paramètre $-t$ de Γ_A se déduit du point de paramètre t par une symétrie d'axe la droite d'équation $y = -x$.

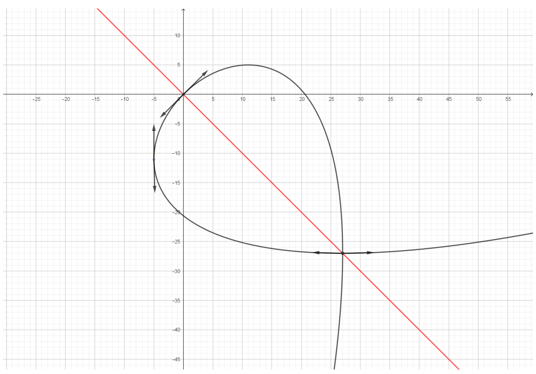
b. Étudier les variations de x et de y ; on consignera les résultats dans un tableau de variations en précisant les tangentes verticales, horizontales et la tangente au point de paramètre 0.
x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a : $\begin{cases} x'(t) = 3(t^2 + 2t - 3) = 3(t+3)(t-1) \\ y'(t) = 3(t^2 - 2t - 3) = 3(t+1)(t-3) \end{cases}$
On en déduit le tableau de variations de x et y sur $\mathbb{R}_+$:

t	0		1		3		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0		$+$		
$x(t)$	0	↘	-5	↗	27	↗	$+\infty$
$y(t)$	0	↘	-11	↘	-27	↗	$+\infty$
$y'(t)$			$-$		0	$+$	

$\rightsquigarrow$ $x'(1) = 0$ et $y'(1) \neq 0$ donc au point de paramètre 1,la courbe admet une tangente verticale.
$\rightsquigarrow$ $y'(3) = 0$ et $x'(3) \neq 0$ donc au point de paramètre 3, la courbe admet une tangente horizontale.
$\rightsquigarrow$ $x'(0) = y'(0) = -9$ donc la tangente au point de paramètre 0 est la droite d'équation $y = x$.

c. Étudier la branche infinie de la restriction de Γ_A à $\mathbb{R}_+$.
On a : $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{y}{x} = 1$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} (x(t) - y(t)) = -\infty$. On en déduit que la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$.

d. Tracer Γ_A sur **la feuille annexe**.



2. $\boxed{\text{ON REVIENT AU CAS GÉNÉRAL}}$

a. Montrer que la courbe Γ_A possède un point singulier si et seulement si A appartient à une courbe $\mathscr{P}$ dont on donnera une équation.

Γ_A possède un point singulier si et seulement s'il existe un paramètre t tel que $x'(t) = y'(t) = 0$, c'est-à-dire si

$$\exists t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} 3t^2 + 6t = a \\ 3t^2 - 6t = b \end{array} \right. \iff \exists t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} 3t^2 + 6t = a \\ t = \dfrac{a-b}{12} \end{array} \right. \iff 3\left(\frac{a-b}{12}\right)^2 + 6\frac{a-b}{12} = a \iff (a-b)^2 - 24(a+b) = 0$$

ce qui est une équation cartésienne de la courbe $\mathscr{P}$.

b. Montrer que $\mathscr{P}$ est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques.

L'équation cartésienne est du type $F(a,b) = 0$, où F est un polynôme de degré 2 en les indéterminées a et b, donc la courbe $\mathscr{P}$ est une conique.

On note $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\det(S) = 0$ donc la conique est du genre parabole.

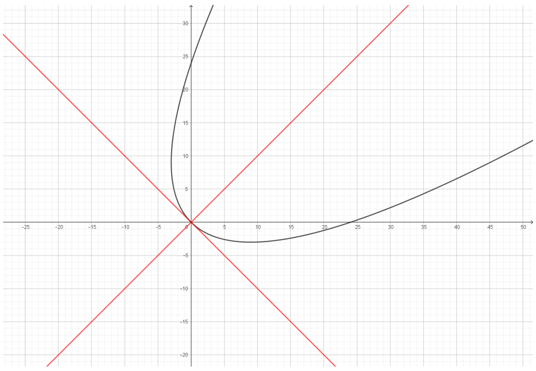
Les valeurs propres de S sont donc 0 et $\operatorname{tr}(S) = 2$ et on a : $E_0 = \operatorname{Vect}\{(1,1)\}$ et $E_2 = \operatorname{Vect}\{(-1,1)\}$.

Ainsi, en notant $\overrightarrow{u} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$ et $\overrightarrow{v} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)$, dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (obtenu par un quart de tour à partir du repère initial), les coordonnées (X,Y) d'un point sont données par : $\left\{ \begin{array}{l} X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b) \\ Y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(b-a) \end{array} \right.$, et l'équation de $\mathscr{P}$ devient :

$$2Y^2 - 24\sqrt{2}X = 0$$

C'est donc une parabole de sommet O et d'axe la première bissectrice.

c. Tracer $\mathscr{P}$ sur **la feuille annexe**.



EXERCICE 2

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. $\boxed{\text{UNE PREMIÈRE ÉTUDE}}$

On considère la surface $\mathscr{S}$ paramétrée par $\left\{ \begin{array}{l} x = u^2 \\ y = uv \\ z = u^2 + v \end{array} \right.$, $\quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$.

a. Déterminer l'ensemble des points non réguliers de $\mathscr{S}$.

On note $M = M(u,v)$ le point de $\mathscr{S}$ de paramètres u et v. On a :

$$\frac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{OM} \wedge \frac{\partial}{\partial v}\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 2u \\ v \\ 2u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v - 2u^2 \\ -2u \\ 2u^2 \end{pmatrix}$$

Les points singuliers de la nappe sont ceux pour lesquels ce produit vectoriel est nul, ce qui donne $u = v = 0$. Ainsi, le seul point stationnaire de $\mathscr{S}$ est le point $M(0,0) = O$.

b. Donner une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$ en tout point régulier de $\mathscr{S}$.

En tout point régulier M de $\mathscr{S}$, le vecteur $\dfrac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{OM} \wedge \dfrac{\partial}{\partial v}\overrightarrow{OM}$ est normal à $\mathscr{S}$ en M donc une équation cartésienne du plan tangent est :

$$(v-2u^2)(x-u^2) - 2u(y-uv) + 2u^2(z-u^2-v) = 0 \iff (v-2u^2)x - 2uy + 2u^2z - u^2v = 0$$

Dans la suite de l'exercice, U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et a, b, c et d quatre fonctions de classe C^1 sur U. On considère la famille de plans $(P_{u,v})_{(u,v)\in U}$ d'équation cartésienne

$$a(u,v)x + b(u,v)y + c(u,v)z = d(u,v)$$

L'objectif est de déterminer une surface Σ dont l'ensemble des plans tangents est la famille $(P_{u,v})_{(u,v)\in U}$. Pour cela, on considère un paramétrage régulier

$$(u,v) \in U \ \mapsto \ M(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

de la surface Σ tel que pour tout $(u,v) \in U$, le plan tangent à Σ au point $M(u,v)$ est le plan $P_{u,v}$.

2. CAS GÉNÉRAL

a. Démontrer que la surface Σ convient si et seulement si

$$\forall (u,v) \in U, \quad \begin{cases} a(u,v)x(u,v) + b(u,v)y(u,v) + c(u,v)z(u,v) = d(u,v) & \textbf{(Eq1)} \\ a(u,v)\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + b(u,v)\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) + c(u,v)\dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v) = 0 & \textbf{(Eq2)} \\ a(u,v)\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) + b(u,v)\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) + c(u,v)\dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v) = 0 & \textbf{(Eq3)} \end{cases}$$

On note $(\mathscr{S}_1)$ ce système.

Il est sous-entendu que pour tout $(u,v) \in U$, le vecteur $\overrightarrow{N}(u,v)$ de coordonnées $(a(u,v), b(u,v), c(u,v))$ est non nul, sans quoi $P_{u,v}$ n'est pas un plan. $\overrightarrow{N}(u,v)$ est alors un vecteur normal au plan $P_{u,v}$.

De plus, le plan tangent à Σ en $M(u,v)$ est le plan passant par $M(u,v)$ et dirigé par $\dfrac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{OM}$ et $\dfrac{\partial}{\partial v}\overrightarrow{OM}$ qui sont non colinéaires car Σ est supposée régulière.

Ainsi, le plan tangent à Σ en $M(u,v)$ est le plan $P_{u,v}$ si, et seulement si

$$\begin{cases} M(u,v) \in P_{u,v} \\ \overrightarrow{N}(u,v)\cdot\dfrac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{OM} = 0 \\ \overrightarrow{N}(u,v)\cdot\dfrac{\partial}{\partial v}\overrightarrow{OM} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \textbf{(Eq1)} \\ \textbf{(Eq2)} \\ \textbf{(Eq3)} \end{cases}$$

b. Démontrer soigneusement que le système $(\mathscr{S}_1)$ est équivalent au système $(\mathscr{S}_2)$ suivant

$$\forall (u,v) \in U, \quad \begin{cases} a(u,v)x(u,v) + b(u,v)y(u,v) + c(u,v)z(u,v) = d(u,v) & \textbf{(Eq1)} \\ \dfrac{\partial a}{\partial u}(u,v)x(u,v) + \dfrac{\partial b}{\partial u}(u,v)y(u,v) + \dfrac{\partial c}{\partial u}(u,v)z(u,v) = \dfrac{\partial d}{\partial u}(u,v) & \textbf{(Eq4)} \\ \dfrac{\partial a}{\partial v}(u,v)x(u,v) + \dfrac{\partial b}{\partial v}(u,v)y(u,v) + \dfrac{\partial c}{\partial v}(u,v)z(u,v) = \dfrac{\partial d}{\partial v}(u,v) & \textbf{(Eq5)} \end{cases}$$

On note alors $(\mathscr{S}_3)$ le système

$$\begin{cases} a(u,v)X + b(u,v)Y + c(u,v)Z = d(u,v) \\ \dfrac{\partial a}{\partial u}(u,v)X + \dfrac{\partial b}{\partial u}(u,v)Y + \dfrac{\partial c}{\partial u}(u,v)Z = \dfrac{\partial d}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial a}{\partial v}(u,v)X + \dfrac{\partial b}{\partial v}(u,v)Y + \dfrac{\partial c}{\partial v}(u,v)Z = \dfrac{\partial d}{\partial v}(u,v) \end{cases}$$

Si $\mathscr{S}_1$ est vérifié, alors en dérivant **(Eq1)** par rapport à u, on obtient que **(Eq2)** + **(Eq4)** est vérifiée, et comme **(Eq2)** est vérifiée, on en déduit que **(Eq4)** l'est également. De même pour **(Eq5)** en dérivant cette fois **(Eq1)** par rapport à v.

Réciproquement, si $\mathscr{S}_2$ est vérifié, on dérive encore **(Eq1)** par rapport à u et on obtient que **(Eq2)** est vérifiée en soustrayant **(Eq4)**, et de même pour **(Eq3)** en dérivant par rapport à v.

Finalement les deux systèmes sont bien équivalents.

3. UNE APPLICATION

Dans cette question, $U = \mathbb{R}^2$ et a, b, c et d sont les fonctions

$$a : (u, v) \mapsto 2u^2 + v \qquad b : (u, v) \mapsto 1 - (2u^2 + v) \qquad c : (u, v) \mapsto u \qquad d : (u, v) \mapsto uv + u^3$$

a. Vérifier que la matrice du système $(\mathscr{S}_3)$ est inversible pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

La matrice sur système $\mathscr{S}_3$ est

$$A(u,v) = \begin{pmatrix} 2u^2+v & 1-(2u^2+v) & u \\ 4u & -4u & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \det(A(u,v)) \underset{C_2 \leftarrow C_2+C_1}{=} \begin{vmatrix} 2u^2+v & 1 & u \\ 4u & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

donc $A(u, v)$ est inversible pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

b. Résoudre $(\mathscr{S}_3)$.

Pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on trouve $A(u,v)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -u & 1+2u^2-v \\ 1 & -u & 2u^2-v \\ 0 & 1 & -4u \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a : $(\mathscr{S}_3) \iff A(u,v)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv+u^3 \\ v+3u^2 \\ u \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A(u,v)^{-1}\begin{pmatrix} uv+u^3 \\ v+3u^2 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-uv \\ -uv \\ v-u^2 \end{pmatrix}$

c. Vérifier que le paramétrage ainsi trouvé est régulier.

On a obtenu la représentation paramétrique de Σ suivante :

$$\begin{cases} x = u - uv \\ y = -uv \\ z = v - u^2 \end{cases}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{OM} \wedge \frac{\partial}{\partial v}\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 1-v \\ -v \\ -2u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -u \\ -u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u^2-v \\ 2u^2+v-1 \\ -u \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a(u,v) \\ b(u,v) \\ c(u,v) \end{pmatrix}$$

et ce vecteur n'est jamais nul, donc la surface est régulière.