⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆ - 2020-2021 -

Math. - ES 2 - S2 - Epreuve 2

lundi 17 mai 2021 - Durée 2 h

EXERCICE 1

1. Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, G désigne une variable aléatoire réelle définie sur Ω.
On suppose que G suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

a. Que vaut $G(\Omega)$? Rappeler les valeurs de $\mathbb{P}(G = k)$ pour tout $k \in G(\Omega)$.

b. Rappeler les formules donnant l'espérance et la variance de G.

Dans la suite de l'exercice, on considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, avec $n, b \in \mathbb{N}^*$. Les boules sont supposées indiscernables au toucher.

2. On tire une boule au hasard dans l'urne.

a. Quelle est la probabilité p d'obtenir une boule noire ?

b. Quelle est la probabilité q d'obtenir une boule blanche ?

On effectue une suite infinie de tirages avec remise dans l'urne décrite précédemment. On suppose qu'on dispose d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ permettant d'étudier cette expérience aléatoire.

3. On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule noire et B la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

a. Déterminer les lois de N et B.

b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}\left((N = k) \cap (B = k)\right)$. Les variables aléatoires N et B sont-elles indépendantes ?

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note N_k l'évènement "obtenir une boule noire au k^{eme} tirage" et B_k l'évènement "obtenir une boule blanche au k^{eme} tirage." On effectue à nouveau une suite infinie de tirages avec remise dans l'urne. On s'intéresse aux nombres de tirages successifs permettant d'obtenir deux changements de couleur dans les résultats. On obtient tout d'abord i boules successives d'une même couleur $(i \in \mathbb{N}^*)$, puis j boules successives de l'autre couleur $(j \in \mathbb{N}^*)$, puis une boule de la couleur initiale et on ne s'intéresse pas aux couleurs obtenues dans les tirages suivants.
La variable aléatoire X désigne le nombre de boules de la même couleur apparues en début de tirage, la variable aléatoire Y désigne le nombre de boules de la même couleur apparues en deuxième partie de tirage. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

a. Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer $\mathbb{P}\left((X = i) \cap (Y = j)\right)$.

b. Déterminer la loi de X.

c. Montrer que

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y = j) = p^2 q^{j-1} + q^2 p^{j-1}$$

d. i. Montrer que X a une espérance et la calculer.

ii. Montrer que $\mathbb{E}(X) \geq 2$.

e. Montrer que Y a une espérance et que $\mathbb{E}(Y) = 2$.

f. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $\mathbb{P}\left((X = n) \cap (Y = n)\right) = (pq)^n$. En déduire $\mathbb{P}(X = Y)$.

5. On considère la variable aléatoire $S = X + Y$.

a. Que vaut $S(\Omega)$? Soit $k \in S(\Omega)$. Décrire l'évènement $(S = k)$ à l'aide des évènements $(X = i)$ et $(Y = j)$.

b. Si $p = q = \dfrac{1}{2}$, déterminer $\mathbb{P}(S = k)$ en fonction de k.

c. Si $p \neq q$, déterminer $\mathbb{P}(S = k)$ en fonction de k.

T.S.V.P. ▶

EXERCICE 2

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$ et de calculer sa valeur.

On considère la fonction $f \ : \ [0, +\infty[\times]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \ f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-xt}$$

ainsi que la fonction $u \ : \ [0, +\infty[\times]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \ u(x,t) = -\frac{x\sin(t) + \cos(t)}{1+x^2} \mathrm{e}^{-xt}$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leq |t|$ valable pour $t \in \mathbb{R}$.

1. $\boxed{\text{Préliminaires}}$

a. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

b. En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t$ est convergente.
En déduire que l'intégrale I est convergente.

c. Soit $x \geq 0$. Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sur $]0, +\infty[$.

Pour la suite de l'exercice, on définit la fonction $F \ : \ [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0, +\infty[, \ F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t) \mathrm{d}t$$

2. $\boxed{\text{Calcul de } F \text{ sur } [0, +\infty[}$

a. Montrer que $|F(x)| \leq \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

b. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que l'on a

$$\forall x \in, [a, +\infty[F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt} \mathrm{d}t$$

c. En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Conclure que

$$\forall x > 0, \ F(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x)$$

3. $\boxed{\text{Conclusion}}$

On considère les fonctions $F_1 \ : \ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F_2 \ : \ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in [0,1], \ F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$$

a. Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.

b. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que

$$F_2(x) = \frac{x\sin(1) + \cos(1)}{1+x^2} \mathrm{e}^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2} \mathrm{d}t$$

c. Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.

d. En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.

Fin de l'énoncé