

Math. - ES 1 - S1 - Algèbre

mardi 03 janvier 2016 - Durée 3 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une *racine carrée* de A si $R^2 = A$. On note :

$$\text{Rac}(A) = \{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), R^2 = A\}$$

1. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.
 - a. Justifier l'existence d'une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$, où $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, puis montrer que R est une racine carrée de A si, et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D .
 - b. Soit S une racine carrée de D .
 - i. Montrer que $DS = SD$.
 - ii. En déduire que S est diagonale. On note $S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)$.
 - iii. Que vaut s_i^2 pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$?
 - c. Expliciter les matrices de $\text{Rac}(A)$ en fonction de P .
 - d. Application : Ecrire les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Avec les notations précédentes, on explicitera P , mais on ne calculera pas P^{-1} .

2. On cherche les racines carrées de la matrice nulle.
 - a. Justifier que $\text{Rac}(0) \neq \emptyset$.
Soient $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une racine carrée de la matrice nulle, et u l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à R . On note r le rang de u .
 - b. Justifier que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$, et que $r \leq \frac{n}{2}$.
 - c. On suppose u non nul, donc $r \geq 1$. Soit (e_1, \dots, e_r) une base de $\text{Im}(u)$ que l'on complète avec $(e_{r+1}, \dots, e_{n-r})$ pour former une base de $\text{Ker}(u)$.
Pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note b_i un vecteur tel que $u(b_i) = e_i$.
Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-r}, b_1, \dots, b_r)$ est une base de \mathbb{R}^n puis écrire la matrice de u dans cette base. On la note M_r .
 - d. Déterminer les racines carrées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la matrice nulle.

3. On cherche les racines carrées de la matrice unité I_n .
 - a. Justifier que $\text{Rac}(I_n) \neq \emptyset$.
Soit R une racine carrée de I_n .
 - b. Justifier que R est inversible.
 - c. Montrer que R est semblable à une matrice diagonale, et l'expliciter.
 - d. Déterminer $\text{Rac}(I_n)$.

T.S.V.P.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

PARTIE 1

Soit ψ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\psi(P) = (X^2 - 1)P'' + 4XP' + 2P$$

1. Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner la matrice de ψ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. a. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme **unitaire** vérifiant $\psi(P) = (k+1)(k+2)P$, et qu'il est de degré k . On notera désormais P_k ce polynôme.
b. Déterminer P_0 et P_1 .
c. Pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, expliciter les coefficients de X^{k-1} et X^{k-2} dans P_k .

PARTIE 2

On note E l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[-1, 1]$.

On identifiera le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ avec la fonction polynomiale $t \mapsto P(t)$ définie sur $[-1, 1]$.

Pour $(f, g) \in E^2$, on pose :

$$\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)dt$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

On munit E de ce produit scalaire, et on note désormais $(f|g)$ le produit scalaire de f et g .

2. Pour $f \in E$ de classe \mathcal{C}^2 , on pose $\psi(f) = \frac{d^2((x^2-1)f(x))}{dx^2}$, c'est à dire :

$$\psi(f) : x \mapsto (x^2 - 1)f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x)$$

- a. Montrer que si f et g sont deux fonctions de E de classe \mathcal{C}^2 , alors $(\psi(f)|g) = (f|\psi(g))$.
 - b. Montrer que la famille de polynômes $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ établie dans la partie 1, est orthogonale.
3. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, P_k est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur à k .
 4. Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.
 - a. Montrer que le polynôme $P_k - XP_{k-1}$ est de degré au plus $k-1$ et qu'il est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à $k-3$.
 - b. En déduire que $P_k - XP_{k-1}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de P_{k-1} et P_{k-2} .
 - c. En utilisant le résultat établi à la question 3.c. de la partie 1, montrer que

$$P_k = XP_{k-1} - \frac{(k-1)(k+1)}{(2k-1)(2k+1)}P_{k-2}$$

Fin de l'énoncé d'algèbre