- ES-S1 - - 2016-2017 -

– Correction - Algèbre –

Exercice 1

1. a. A admet n valeurs propres distinctes donc son polynôme caractéristique est scindé à racines simples, donc elle est diagonalisable.
$R^2 = A \Leftrightarrow R^2 = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}R^2P = D \Leftrightarrow \left(P^{-1}RP\right)^2 = D \Leftrightarrow S^2 = D$.

b. i. $SD = SS^2 = S^2S = DS$.

ii. On note (s_{ij}) et $(\lambda_i\delta_{i,j})$ les coefficients respectifs de S et D.
Comme $SD = DS$, on a : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} s_{ik}\lambda_k\delta_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i\delta_{i,k}s_{kj}$ donc $\lambda_j s_{ij} = \lambda_i s_{ij}$.
Si $i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j$ donc pour $i \neq j, s_{ij} = 0$ ce qui prouve que S est diagonale.

iii. $S = \mathrm{diag}(s_1, ..., s_n)$ donc $S^2 = \mathrm{diag}(s_1^2, ..., s_n^2) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$; on a : $\forall i \in [\![1,n]\!], s_i^2 = \lambda_i$.

c.
- Si $\lambda_1 < 0$, on ne peut pas avoir (dans $\mathbb{R}$) $s_1^2 = \lambda_1$ donc D n'admet pas de racine, et par suite, d'après la question 1 : $Rac(A) = \varnothing$.
- Si $\lambda_1 \geq 0$, alors toutes les valeurs propres sont positives (car elles sont rangées dans le sens croissant), et $\forall i \in [\![1,n]\!], s_i^2 = \lambda_i \Rightarrow s_i = \varepsilon_i\sqrt{\lambda_i}$ où $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.
Réciproquement, une matrice $S = \mathrm{diag}(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, ..., \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n})$ vérifie bien $S^2 = D$. On obtient donc :
$Rac(A) = \left\{P\mathrm{diag}(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, ..., \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n})P^{-1}, \forall i \in [\![1,n]\!] : \varepsilon_i \in \{-1,1\}\right\}$.

d. $\chi_A = X(X-1)(X-2)$. $Rac(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}, \forall i \in \{1,2\} : \varepsilon_i \in \{-1,1\}, \right\}$
avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a. $0 \in Rac(0)$ donc $Rac(0) \neq \varnothing$.

b. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$; $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = u(x)$. Alors $u(y) = u^2(x) = 0$ car la matrice de u^2 dans la base canonique est $R^2 = 0$, d'où l'inclusion.
D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - r$ et d'après l'inclusion, $r \leq \dim(\mathrm{Ker}(u))$, ce qui donne $r \leq n - r$ d'où $r \leq \dfrac{n}{2}$.

c. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_{n-r}, \mu_1, ..., \mu_r$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j b_j = 0$.
On applique u, et on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i u(e_i) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j u(b_j) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j e_j = 0$. La famille $\{e_1, ..., e_r\}$ est libre (car c'est une base de $\mathrm{Im}(u)$) donc $\forall j \in [\![1,r]\!], \mu_j = 0$, puis $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i e_i = 0$. La famille $\{e_1, ..., e_{n-r}\}$ est libre (car c'est une base de $\mathrm{Ker}(u)$) donc $\forall i \in [\![1, n-r]\!], \lambda_i = 0$.
Finalement, la famille $\mathcal{B}$ est libre, de cardinal n c'est donc une base de $\mathbb{R}^n$.
Par construction, on a : $M_r = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d. D'après la question précédente, si R est une racine carrée de la matrice nulle, elle est soit nulle, soit semblable à une matrice M_r avec $r \leq \dfrac{n}{2}$.

Réciproquement, les matrices PM_rP^{-1} avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $r \leq \dfrac{n}{2}$ (dont la matrice 0 fait partie pour $r=0$) vérifient : $\left(PM_rP^{-1}\right)^2 = PM_r^2P^{-1} = P0P^{-1} = 0$.
En conclusion, $Rac(0) = \left\{PM_rP^{-1}, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), r \leq \dfrac{n}{2}\right\}$.

3. a. $\mathrm{I}_n \in Rac(\mathrm{I}_n)$ donc $Rac(\mathrm{I}_n) \neq \varnothing$.

b. On a $R^2 = \mathrm{I}_n$ donc $\det(R^2) = (\det(R))^2 = 1$; en particulier, $\det(R) \neq 0$ donc R est inversible.

c. On a $(R - \mathrm{I}_n)(R + \mathrm{I}_n) = 0$ donc le polynôme $(X-1)(X+1)$, scindé à racines simples, annule R. On en déduit que R est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des racines de $(X-1)(X+1)$ c'est-à-dire 1 ou -1. Donc R est semblable à une matrice diagonale ne comportant que des 1 et des -1 sur la diagonale.

d. D'après la question précédente, si R est une racine carrée de la matrice unité, alors elle est semblable à $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ où $\forall i \in [\![1,n]\!], \varepsilon_i \in \{-1,1\}$.
Réciproquement, si $R = P\mathrm{diag}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)P^{-1}$ où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\forall i \in [\![1,n]\!], \varepsilon_i \in \{-1,1\}$, alors $R^2 = \mathrm{I}_n$. En conclusion :
$Rac(\mathrm{I}_n) = \left\{P\mathrm{diag}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)P^{-1}, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \forall i \in [\![1,n]\!] : \varepsilon_i \in \{-1,1\}\right\}$.

Exercice 2

PARTIE 1

1. • $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \deg((X^2-1)P'' + 4XP' + 2P) \leq n$ donc $\psi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$;
• Par la linéarité de l'opérateur de dérivation, ψ est linéaire.
ψ est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. $\forall k \in [\![0,n]\!], \psi(X^k) = (k+2)(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$. On en déduit la matrice de ψ dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 1\times 2 & 0 & -1\times 2 & & & \\ & 2\times 3 & 0 & \ddots & & (0) \\ & & 3\times 4 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ & (0) & & & \ddots & 0 \\ & & & & & (n+1)(n+2) \end{pmatrix}.$$

3. a. La matrice de ψ étant triangulaire, on déterminer aisément les $n+1$ valeurs propres de ψ :
$\mathrm{Sp}(\psi) = \{1\times 2, 2\times 3, ..., (n+1)(n+2)\}$.
Les valeurs propres sont de multiplicité 1, donc chaque espace propre a pour dimension 1.
Ainsi, $\forall k \in [\![0,n]\!], \exists Q_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $E_{(k+1)(k+2)} = \mathrm{Vect}\{Q_k\}$. Autrement dit, les vecteurs propres associés à la valeur propre $(k+1)(k+2)$ sont de la forme λQ_k avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. En divisant Q_k (qui est non nul car c'est un vecteur propre) par son coefficient dominant, on obtient l'unique polynôme unitaire P_k qui vérifie $\psi(P_k) = (k+1)(k+2)P_k$.
Notons d le degré de P_k. Le coefficient dominant de $\psi(P_k)$ est $d(d-1)+4d+2$ et celui de $(k+1)(k+2)P_k$ est $(k+1)(k+2)$; on a donc : $d^2+3d+2 = k^2+3k+2$ d'où $(k-d)(k+d+3) = 0$. d et k étant des entiers positifs, il vient $d = k$.

b. Pour $k = 0$ le polynôme P_0 est constant et unitaire donc $P_0 = X^0$.
Pour $k = 1$, on note $P_1 = X + a$. L'égalité $\psi(P_1) = 6P_1$ donne $a = 0$ d'où $P_1 = X$.

c. On note $P_k = X^k + a_{k-1}X^{k-1} + a_{k-2}X^{k-2} + R_k$ où $\deg(R_k) < k-2$.
L'égalité $\psi(P_k) = (k+1)(k+2)P_k$ donne, en identifiant les coefficients de X^{k-1} et X^{k-2} :
$a_{k-1} = 0$ et $a_{k-2} = -\dfrac{k(k-1)}{4k+2}$.

PARTIE 2

1.
- $\forall (f,g)\in E^2, f,g$ et $t\mapsto (1-t^2)$ étant continues sur $[-1,1]$, $\varphi(f,g)$ existe et $\varphi(f,g)\in\mathbb{R}$.
- $\forall (f,g)\in E^2, \varphi(f,g)=\varphi(g,f)$ donc φ est symétrique.
- Par linéarité de l'intégrale, $\forall (f,g,h,\lambda)\in E^3\times\mathbb{R}, \varphi(f+\lambda g,h)=\varphi(f,h)+\lambda\varphi(g,h)$, donc φ est linéaire par rapport à sa première variable, puis par symétrie, bilinéaire.
- $\forall f\in E, \forall t\in[-1,1], f^2(t)(1-t^2)\geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale, $\varphi(f,f)\geq 0$;
  de plus, $t\mapsto f^2(t)(1-t^2)$ est continue sur $[-1,1]$ donc $\varphi(f,f)=0 \Leftrightarrow \forall t\in[-1,1], f^2(t)(1-t^2)=0$.
  On en déduit que $\forall t\in]-1,1[, f(t)=0$ puis, f étant continue sur $[-1,1]$, $\forall t\in[-1,1], f(t)=0$.
  φ est donc définie positive.

En conclusion, φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive, c'est donc un produit scalaire sur E.

2. a. Soient f et g de classe $\mathcal{C}^2$.

$$(\psi(f)|g)=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^2((x^2-1)f(x))}{\mathrm{d}x^2}(t)g(t)(1-t^2)\mathrm{d}t$$

A l'aide de deux intégrations par parties (chaque fonction concernée étant de classe $\mathcal{C}^1$), on obtient :

$$(\psi(f)|g)=\left[\frac{\mathrm{d}((x^2-1)f(x))}{\mathrm{d}x}(t)g(t)(1-t^2)\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}((x^2-1)f(x))}{\mathrm{d}x}(t)\frac{\mathrm{d}((x^2-1)g(x))}{\mathrm{d}x}(t)\mathrm{d}t$$

$$=\left[(t^2-1)f(t)\frac{\mathrm{d}((x^2-1)g(x))}{\mathrm{d}x}(t)\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(t)\frac{\mathrm{d}^2((x^2-1)g(x))}{\mathrm{d}x^2}(t)\mathrm{d}t=(f|\psi(g))$$

b. Soit $(l,k)\in[\![0,n]\!]^2$. En appliquant le résultat précédent, on a :
$(\psi(P_k)|P_l)=(P_k|\psi(P_l))$ donc $(k+1)(k+2)(P_k|P_l)=(l+1)(l+2)(P_k|P_l)$ ou $(k-l)(k+l+3)(P_k|P_l)=0$.
Si $k\neq l$, $(k-l)(k+l+3)\neq 0$ donc $(P_k|P_l)=0$.
La famille $\{P_0,...P_n\}$ est donc orthogonale.

3. Soit $k\in[\![0,n]\!]$. D'après la question précédente, $\{P_0,...,P_k\}$ est une famille orthogonale, donc libre. D'après la question 3.a de la partie 1, $\forall i\in[\![0,n]\!], \deg(P_i)=i$. On peut donc dire que $(P_0,...,P_k)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$.
Si $k=0$ le seul polynôme de degré strictement inférieur à k est le polynôme nul, orthogonal à P_k.
Si $k\neq 0$: soit Q un polynôme de degré $d<k$. Dans la base $(P_0,...,P_d)$ de $\mathbb{R}_d[X]$, on a :

$$Q=\sum_{i=0}^{d}\lambda_iP_i \text{ donc } (P_k|Q)=\sum_{i=0}^{d}\lambda_i(P_k|P_i)=0.$$

4. a. P_k et XP_{k-1} sont unitaires de degré k donc P_k-XP_{k-1} est de degré au plus $k-1$.
Soit Q un polynôme de degré $d\leq k-3$. On vérifie aisément que $\forall P\in\mathbb{R}[X], (XP|Q)=(P|XQ)$.
On a : $(P_k-XP_{k-1}|Q)=(P_k|Q)-(P_{k-1}|XQ)$; $\deg(XQ)\leq k-2$ donc d'après la question précédente, $(P_k-XP_{k-1}|Q)=0$

b. P_k-XP_{k-1} est de degré au plus $k-1$ donc dans la base (orthogonale) $(P_0,...,P_{k-1})$ de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$,
on a : $P_k-XP_{k-1}=\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\lambda_iP_i$ avec $\forall i\in[\![0,k-1]\!], \lambda_i=\dfrac{(P_k-XP_{k-1}|P_i)}{\|P_i\|^2}$, donc $\forall i\in[\![0,k-3]\!], \lambda_i=0$.
On a donc : $P_k-XP_{k-1}=\lambda_{k-2}P_{k-2}+\lambda_{k-1}P_{k-1}$.

c. Par identification avec les coefficients de X^{k-1} et X^{k-2} dans P_k établis à la question 3.c de la partie 1 on obtient : $\lambda_{k-1}=0$ et $\lambda_{k-2}=-\dfrac{(k-1)(k+1)}{(2k-1)(2k+1)}$.